Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 2

18. 11. 2003

Familienname(n) *Vorname(n)* *Matr.nr(n)/Ü.einheit*

Bei Gruppenarbeit gerechnete Beispiele nur einmal, versehen mit beiden Namen und Matrikelnummern, abgeben!

Geben Sie bitte an,

— welche Aufgaben Sie bearbeitet haben

— welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

			Pkte	T-Pkte
Übertrag 1. Übungsblatt				
Aufgabe	bearbeitet	Tafel		
1	☐	☐		
2	☐	☐		
3	☐	☐		
4	☐	☐		
5	☐	☐		
6	☐	☐		
7	☐	☐		
8	☐	☐		
	Gesamt 2. Übungsblatt:		☐	☐
	Gesamt 1. und 2. Übungsblatt:		☐	☐

1. [A 4. 17] Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten wird eine Karte gezogen. Wir betrachten folgende Ereignisse: 3 P

A — die gezogene Karte ist ein Ass,

B — die gezogene Karte ist von roter Farbe,

C — die gezogene Karte ist ein Karo–Ass,

D — die gezogene Karte ist eine Zehn.

Man bestimme, ob die folgenden Paare von Ereignissen *unabhängig* sind.

(a) A und B; (b) A und C; (c) B und C; (d) B und D; (e) C und D.

2. [A 4. 22] Gegeben sei ein Feld der Länge n auf das zufällig r Daten abgespeichert werden sollen (**Hash–Tabelle**). Eine Mehrfachbesetzung des selben Speicherplatzes nennt man *Kollision*. Die Wahrscheinlichkeit, dass *keine Kollision* stattfindet kann approximativ angegeben werden als $P_r = \exp(-r^2/(2n))$. Für $n = 1024$, $r = 37$ ergibt sich $P_r \approx 0.512$ (exakt:0.522). Für $n = 1024$, $r = 10$ erhält man $P_r \approx 0.952$ (exakt:0.957). 6 P

(a) Führen Sie das 1. Szenario ($n = 1024$, $r = 37$) in 8 Simulationsläufen mit $m = 250, 500, 1000$ und 2000 Wiederholungen durch, wobei die Integerzahl `j = random(n)+1` die belegte Zelle j angibt. Berechnen Sie $x_i = \#(\text{Belegungen ohne Kollision})/m$, deren Mittelwerte $\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i$ und Standardabweichungen $s = (\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2)^{1/2}$. Definieren Sie einen neuen Startwert vor jeder Simulationsserie (d.h. die erste Simulationsserie besteht aus den 8 Simulationsläufen mit 250 Wiederholungen, die 2. Simulationsserie aus den 8 Simulationsläufen mit 500 Wh. usw.).

(b) Simulieren Sie das 2. Szenario ($n = 1024$, $r = 10$) analog zu (a).

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse in (a) und (b) mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten P_r.

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe-Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (Quellcode, exe-File, Ergebnisfile) bis **Montag, den 17.11.03, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

(a) Starten eines Ftp Programmes (z.B. WS_FTP95 LE)

(b) Name des Rechners eingeben: zid.tu-graz.ac.at

(c) Username: abgabe

(d) Passwort: WS03/04

(e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter /incoming/wthstoch.

3. [A 4. 32] Ein Paddler steht vor folgenden Einschätzungen. Mit 90%–iger Wahrscheinlichkeit schafft er die kritische Stelle *ohne Kenterung.* Falls er *kentert*, gelingt ihm mit 80%–iger Wahrscheinlichkeit die Eskimorolle. Falls er das Boot verlassen und schwimmen muss, rechnet er nur mit 60% Überlebenswahrscheinlichkeit. 3 P

(a) Wie groß ist das Risiko zu ertrinken?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann sich der *gekenterte* Paddler retten?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der *überlebende* Paddler eine Kenterung hinter sich hat?

4. [A 5. 3] 4 P

(a) Für welche Werte von c definieren die folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_k = P_X(X = k)$ auf den positiven ganzen Zahlen $k = 1, 2, \dots$?

i. $p_k = c\,\dfrac{2^k}{k!}$ (modifizierte POISSON)

ii. $p_k = \dfrac{c}{2^k}$ (geometrisch)

iii. $p_k = \dfrac{c}{k2^k}$ (logarithmisch)

iv. $p_k = \dfrac{c}{k^2}$ (invers quadratisch)

(b) Wie lauten die Erzeugenden Funktionen $G_X(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$?

(c) Für welche Verteilungen existiert der Erwartungswert $E(X)$? Geben Sie diesen gegebenfalls an.

5. [A 5. 4] Eine stetige Zufallsvariable X sei gegeben durch ihre Verteilungsfunktion 4 P

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/3 & 0 \le x < 1 \\ x - 2/3 & 1 \le x < k \\ 1 & x \ge k \end{cases}$$

(a) Wie groß muss k sein?

(b) Stellen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ graphisch dar.

(c) Bestimmen Sie die Dichtefunktion $f_X(x)$.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

(e) Wie groß ist $P_X(\frac{1}{2} \le X \le 1)$?

6. [A 6. 2] Eine Firma vereinbart mit einem Zulieferanten von Bauteilen folgende Abnahmekontrolle. Jeder (umfangreichen) Lieferung werden 20 Stück entnommen, die alle geprüft werden. Findet man dabei *keinen fehlerhaften* Bauteil, so wird die *gesamte* Lieferung *angenommen*, findet man *mindestens 2 fehlerhafte* Bauteile, so wird sie *zurückgewiesen*. Bei Feststellung *eines fehlerhaften* Bauteils wird aus *derselben* Lieferung eine zweite Stichprobe von 20 Stück entnommen. Die Lieferung wird angenommen, falls kein defektes Bauteil darunter ist, sonst zurückgewiesen. $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

Es werden nur 8% fehlerhafte Bauteile in einer vorliegenden Lieferung angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) muss eine zweite Stichprobe entnommen werden,

(b) wird diese Lieferung angenommen,

(c) wurden bei einer Annahme zwei Stichproben geprüft?

(d) Wie viele Bauteile werden im Mittel pro Lieferung bei einem angenommenen stets gleichen Fehleranteil zu prüfen sein?

Hinweis: Rechnung unter Verwendung der Binomialverteilung.

7. [A 6. 11] Der polnische Mathematiker BANACH war ein leidenschaftlicher Raucher. Damit er stets Zündhölzer bei sich hatte, trug er in zwei Taschen je eine Schachtel Zündhölzer, von denen er bei Bedarf zufällig ein Streichholz nahm. In die *rechte* Tasche griff er mit der Wahrscheinlichkeit p, in die *linke* Tasche mit der W $q = 1 - p$. An einem Tag steckte er zwei volle Schachteln in seine Taschen. In jeder Tasche waren n Zündhölzer. Es bezeichne P_k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Moment, in dem er zum *erstenmal* eine der Schachteln leer gefunden hat, in der anderen noch k Zündhölzer waren. $\boxed{3\ \mathrm{P}}$

(a) Man berechne P_k.

(b) Sei $p = q = \frac{1}{2}$. Bei welchem Wert von k wird P_k maximal?

8. **[A 7. 6]** Interpretiert man eine stetige Zufallsvariable $T \geq 0$ mit Verteilungsfunktion $F_T(t)$ und Dichte $f_T(t)$ als *Lebensdauer* eines Systems, so heißt $\boxed{4\text{ P}}$

$$a(t) := \frac{1}{1 - F_T(t)} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

Ausfallrate (hazard rate) des Systems. $a(t) \cdot \Delta t$ ist als eine Näherung für die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zeitraum $(t, t + \Delta t]$ ausfällt, wenn es zum Zeitpunkt t noch intakt war. Berechnen Sie die Ausfallraten $a(t)$ für

(a) eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable T mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t) & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

(b) eine *Weibull–verteilte* Zufallsvariable T mit Parametern $s > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t^s) & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

(c) eine *Hjorth–verteilte* Zufallsvariable T mit den Parametern $q > 0$, $r > 0$ und $\lambda > 0$, d.h.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{\exp(-r \cdot t^2/2)}{(1+q \cdot t)^{\lambda/q}} & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Maximal erreichbare Punkteanzahl $\boxed{30\text{ P}}$

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 18.11.2003 9 Uhr** in HS B oder im Sekretariat.

Besprechungstermine:

Gruppe 1 :	**Di. 18. 11. 2003**	**09:00-10:30**	**HS B**: UProf. Stadlober
Gruppe 2+3:	**Di. 18. 11. 2003**	**11:00-12:30**	**HS G**: DI Kern
Gruppe 4+5:	**Di. 18. 11. 2003**	**14:00-15:30**	**HS B**: DI Kern

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere TutorInnen:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern `kern@stat.tu-graz.ac.at`

Gordana Antic `gantic@sbox.TUGraz.at`

Radoslava Mirkov `rmirkov@sbox.TUGraz.at`

Günther Sieghartsleitner `siegh@sbox.TUGraz.at`