Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

Übungsblatt 1

24. Okt. 2006

1. [A 2.2] Gegeben sei $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$.

(a) Welches der folgenden Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist ein W–Raum?

i. $\mathcal{A} = \{\phi, \{a, c\}, \{b, d, e\}, \Omega\}$; $P(\{a, c\}) = 0.4$; $P(\{b, d, e\}) = 0.6$.

ii. $\mathcal{A} = \{\phi, \Omega\}$; $P(\phi) = 0$.

iii. $\mathcal{A} = \{\phi, \{a, b, c, d\}, \{e\}, \Omega\}$; $P(\{a, b, c, d\}) = 0.8$; $P(\{e\}) = 0.1$.

iv. $\mathcal{A} = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \Omega\}$; $P(\{a\}) = 0.2$; $P(\{b, c\}) = P(\{d, e\}) = 0.4$.

(b) Geben Sie den kleinsten Ereignisraum über Ω an, der

i. das Ereignis $A = \{a, b, c\}$,

ii. die Ereignisse $M = \{a, b, c\}$ und $N = \{c, d, e\}$ enthält.

2. [A 2.7] Die Ermittlung jeder einzelnen Gewinnzahl beim Roulette stellt einen Zufallsvorgang dar mit den 37 möglichen und gleichwahrscheinlichen Elementarausgängen $0, 1, 2, \ldots, 36$. Die von 0 verschiedenen Zahlen sind je zur Hälfte roten bzw. schwarzen Feldern zugeordnet. Spieler A habe auf *schwarz* gesetzt, Spieler B auf *gerade Zahl* (ohne 0) sowie auf 17 und Spieler C auf $1, 2, \ldots, 18$, *ungerade Zahl* und auch noch auf die Querreihe $34, 35, 36$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler A, Spieler B bzw. Spieler C? Interpretieren Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit von Spieler C mit den folgenden Wahrscheinlichkeitsregeln:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) &= P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \\
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\
&\quad P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

3. [A 2.10] Ein Würfel werde *zwei Mal* geworfen. Definieren Sie den dazugehörigen W-Raum und berechnen sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.

(a) Die beiden Augenzahlen haben keinen gemeinsamen Faktor größer als eins.

(b) Die Summe der Augenzahlen ist 2, 3 oder 12.

(c) Das Produkt der Augenzahlen ist ungerade.

(d) Der erste Wurf zeigt eine kleinere Augenzahl als der zweite.

(e) Es werden verschiedene Augenzahlen geworfen und die kleinere ist gleich $r, 1 \leq r \leq 5$.

4. [A 3.7] Das Blatt beim *Bauernschnapsen* besteht aus 20 Karten (4 Farben mit je 5 Karten: Unter, Ober, König, Zehn, Ass). Jeder der vier Spieler erhält 5 Karten. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass im Blatt von Spieler A folgende Karten sind:

(a) *genau* 2 Asse,

(b) *mindestens* 2 Asse,

(c*) *mindestens* ein *beliebiges* Tupel (Tupel = *genau* 2 Karten mit gleichem Nennwert, Bsp.: 4 Ober bilden keine 2 Tupel),

(d*) *genau* 2 Karo und die aufeinanderfolgend,

(e*) *mindestens* von einer Farbe *genau* 2 Karten und die aufeinanderfolgend.

Hinweis: Für (c*) und (e*) benutze man die Formel von POINCARÉ.

5. [A 4.4] Man berechne beim *Bauernschnapsen* folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a) *Jeder* Spieler hat *ein* Ass.

(b) *Genau* ein Spieler hat *genau* zwei Asse.

(c) *Mindestens* ein Spieler hat *genau* zwei Asse.

(d) Ein Spieler hat mindestens drei Asse.

6. [A 4.24] Eine Computerfirma beschäftigt drei tüchtige Verkaufsingenieure. Ingenieur 1 schätzt die Kosten von 30%, Ingenieur 2 von 20% und Ingenieur 3 von 50% der von der Firma angebotenen Projekte. Ernsthafte Fehler bei der Kostenschätzung passieren den Ingenieuren 1, 2, 3 mit Wahrscheinlichkeit 0.01, 0.03 und 0.02. Man berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a) Die Kosten eines angebotenen Projekts wurden von Ingenieur i, $i = 1, 2, 3$, richtig geschätzt.

(b) Die Schätzung der Projektkosten ist falsch.

(c) Für ein falsch geschätztes Projekt ist Ingenieur i, $i = 1, 2, 3$, verantwortlich.

7. [A 4.17] Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten wird eine Karte gezogen. Wir betrachten folgende Ereignisse:

A — die gezogene Karte ist ein Ass,

B — die gezogene Karte ist von roter Farbe,

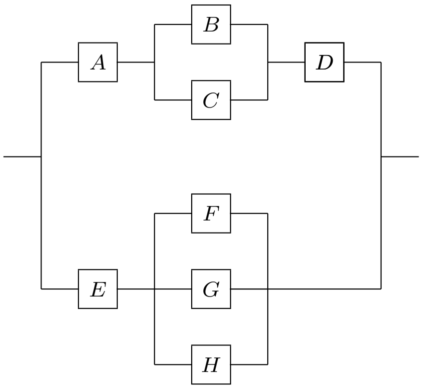
C — die gezogene Karte ist das Karo–Ass,

D — die gezogene Karte ist eine Zehn.

Man bestimme, ob die folgenden Paare von Ereignissen *unabhängig* sind.

(a) A und B; (b) A und C; (c) B und C; (d) B und D; (e) C und D.

8. **[A 4.25]** Ein System besteht aus 8 Komponenten (siehe Diagramm). Man berechne die Zuverlässigkeit des Systems, falls folgende Wahrscheinlichkeiten für das Funktionieren der Komponenten gegeben sind: $p_A = 0.90, p_B = 0.95, p_C = 0.85, p_D = 0.85, p_E = 0.98, p_F = 0.80$, $p_G = 0.95, p_H = 0.95$.



Besprechungstermine:

Gruppe A:	**Di. 24. 10. 2006**	**10:45 - 13:00**	**HS G**: Prof. Stadlober
Gruppe B:	**Di. 24. 10. 2006**	**13:00 - 14:30**	**HS B**: Mag. Hörmann
Gruppe C:	**Di. 24. 10. 2006**	**14:45 - 16:15**	**HS B**: Mag. Hörmann

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftlichen Mitarbeiter oder an unsere StudienassistentInnen:

Mag. Siegfried Hörmann `shoermann@TUGraz.at`

Gordana Djuras `gordana.djuras@joanneum.at`

Verena Feirer `vfeirer@sbox.TUGraz.at`

DI Johannes Schauer `johannes.schauer@TUGraz.at`