

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

ÜBUNGSBLATT 1

02. 11. 2004

Familiennamen

Vorname

Matrikelnummer

Geben Sie bitte an,

- welche Aufgaben Sie bearbeitet haben
- welche Aufgaben Sie an der Tafel vorführen könnten.

Bitte die entsprechenden Zellen ankreuzen.

Aufgabe	bearbeitet	Tafel	Pkte	T-Pkte
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		
	Gesamt 1. Übungsblatt:		<input type="text"/>	<input type="text"/>

1. [A 2. 3]

2 P

- (a) A und B seien beliebige Teilmengen von Ω . Geben Sie den kleinsten Ereignisraum \mathcal{A} über Ω an, der die Mengen A und B enthält.
- (b) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme der in \mathcal{A} enthaltenen Mengen.
- (c) Was gilt für den Spezialfall $A \cap B = \emptyset$?

2. [A 2. 13] Man simuliere in C (C++, Turbo Pascal oder in einer anderen exekutierbaren Programmiersprache) die beiden Glücksspiele des Chevalier DE MERÉ mit Hilfe des Zufallsgenerators `random`. Der Aufruf `random ()` liefert einen (zufälligen) Realwert in $(0,1)$. Ein zufälliger positiver Integerwert aus $\{0, \dots, k - 1\}$ wird durch `random (k)` erzielt. Die Integerzahl `i=random (6)+1` ist also ein Ergebnis des Zufallsexperiments *Wurf eines Würfels*. Vor der mehrmaligen Simulation eines Zufallsexperiments mit Hilfe von `random` ist es notwendig, einen neuen Startwert des Generators durch den Befehl `randomize` zu initialisieren.

6 P

- (a) Führen Sie das 1. Spiel *4 Würfe mit einem Würfel* in 8 Simulationsläufen mit $n = 50, 100, 200, 500$ und 1000 durch. Berechnen Sie die relative Anzahl x_i der Ereignisse *Mindestens eine Sechs bei einem Spiel* und geben Sie die Mittelwerte $\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i$ und die Standardabweichungen $s = (\frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2)^{1/2}$ aus. Definieren Sie durch `randomize` einen neuen Startwert vor jeder Simulationsserie (d.h. die erste Simulationsserie besteht aus den acht Simulationsläufen mit 50 Wiederholungen, die zweite Simulationsserie aus den acht Simulationsläufen mit 100 Wiederholungen etc.)
- (b) Simulieren Sie das 2. Spiel *24 Würfe mit zwei Würfeln* analog zu (a) und registrieren Sie die relative Anzahl der Ereignisse *Mindestens eine Doppelsechs bei einem Spiel*.
- (c) Vergleichen Sie die Ereignisse in (a) und (b) mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Ist die Anzahl der Wiederholungen groß genug?

Hinweis: Verwenden Sie bitte nur Programmiersprachen, die **exe-Files erzeugen** und unter **Windows lauffähig** sind. Übermitteln Sie die Dateien (**Quellcode, exe-File, Ergebnisfile**) bis **Montag, den 01.11.04, 20 Uhr**, über Ftp wie folgt an uns:

- (a) Starten eines Ftp Programmes (z.B. WS_FTP95 LE)
- (b) Name des Rechners eingeben: `zid.tu-graz.ac.at`
- (c) Username: `abgabe`
- (d) Passwort: `WS04/05`
- (e) Ablegen der Dateien (bezeichnet mit Familiennamen, max. 8 Zeichen) unter `/incoming/wthstoch`.

3. [A 2. 12] Um bei einem Brettspiel wie *Mensch ärgere dich nicht* beginnen zu können, ist es zuerst notwendig mit dem Würfel eine *Sechs* zu werfen. 4 P

- (a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum für das Zufallsexperiment *Werfen des Würfels bis zum ersten Mal die Sechs kommt*.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit die *erste Sechs beim dritten Versuch* zu werfen?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man für die erste Sechs *mehr als drei Versuche* benötigt?
- (d) Für welche Anzahl von Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit, das *erste Mal eine Sechs* zu werfen am größten?
- (e) Nach wie vielen Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sechs geworfen wurde zumindest 0.95?

4. [A 3. 4] Man plaziere 3 P

- (a) 7 schwarzfeldrige Läufer,
- (b) 8 schwarzfeldrige Läufer,
- (c) 8 Türme

zufällig auf ein Schachbrett (LAPLACE-Experiment). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Figur eine andere schlagen kann?

Hinweis: In (a) und (b) dürfen keine zwei Läufer auf ein- und derselben Diagonalen stehen. In (c) dürfen keine zwei Türme auf ein- und derselben Vertikalen stehen.

5. [A 3. 10] Gegeben seien ein Parallelrechner mit $n \geq 2$ Prozessoren und $k \geq 1$ voneinander nicht unterscheidbaren Jobs. 5 P

- (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Jobs auf die einzelnen Prozessoren zu verteilen, wenn jedem Prozessor auch mehrere Jobs zugeteilt werden dürfen?
- (b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass
 - i. der erste Prozessor keinen
 - ii. jeder Prozessor mindestens einen
 - iii. mindestens ein Prozessor keinen
 - iv. genau ein Prozessor keinenJob zugeteilt bekommt.
- (c) Nun seien $n = 4$ und $k = 11$. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Prozessor 3, der zweite 4, der dritte 3 und der vierte 1 Job(s) zugeteilt bekommt.

6. [A 3. 9] In einer Gruppe von $(n + 1)$ Studenten gibt ein Student die Lösung seiner Übungsaufgaben an einen zweiten, dieser gibt sie wiederum einem dritten usw. Bei jedem dieser Schritte sei der Empfänger der Lösung zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) unter den übrigen n Studenten auszuwählen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lösungen r -mal weitergegeben werden,
- (a) ohne den Bearbeiter der Aufgabe wieder zu erreichen,
 (b) ohne dass ein Student die Lösung zweimal erfährt.

Hinweis: Man beschreibe das Problem durch die Verteilung von r Kugeln auf n Zellen und sehe als Ergebnisraum die Menge der Tupel (j_1, \dots, j_r) an, wobei (j_1, \dots, j_r) bedeutet, dass die Kugel Nr. 1 in Zelle Nr. j_1 , Kugel Nr. 2 in Zelle Nr. j_2, \dots , Kugel Nr. r in Zelle Nr. j_r gelegt wird.

7. [A 4. 1] Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ eine Zerlegung von Ω mit $P(A_i) = \frac{1}{n}$ für alle i . Ferner sei $B \in \mathcal{A}$ und für die bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt $P(B|A_i) = \frac{1}{3}$ für alle i .
- (a) Man berechne $P(B)$.
 (b) Man berechne $P(A_i|B)$ für $i = 1, \dots, n$.
 (c) Man berechne $P(A_i|\overline{B})$ für $i = 1, \dots, n$.

8. [A 4. 7] In einer Familie wird eifrig Tischtennis gespielt. Eines Tages schlägt der Vater seinem Sohn Matthias vor, dass er ein besonderes Geschenk erhält, wenn er von 3 Tischtennismatches, die er abwechselnd gegen ihn und seine Schwester Lisa spielt, 2 hintereinander gewinnt. Der Vater spielt stärker als Lisa. Mit Wahrscheinlichkeit p_V gewinnt Matthias gegen den Vater und mit Wahrscheinlichkeit p_L gewinnt er gegen Lisa. Die Spiele werden als unabhängig vorausgesetzt.
- (a) Matthias kann gegen den Vater oder gegen Lisa beginnen. Zeichnen Sie den W-Baum für beide Strategien.
 (b) Geben Sie die allgemeinen Formeln für seine Gewinnwahrscheinlichkeiten an. Mit welcher Strategie hat er größere Gewinnchancen?
 (c) Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für beide Strategien, falls $p_V = 0.4$ und $p_L = 0.6$.

Maximal erreichbare Punkteanzahl

30 P

Abgabetermin: Spätestens am **Di. 02.11.2003 11 Uhr** im HS G oder im Sekretariat.

Besprechungstermine:

Gruppe 1: Di. 02. 11. 2004 11:00-12:30 HS G: UProf. Stadlober

Gruppe 2: Di. 02. 11. 2004 13:00-14:30 HS B: DI Kern

Gruppe 3: Di. 02. 11. 2004 14:45-16:15 HS B: DI Kern

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an unsere Wissenschaftliche Mitarbeiterin oder an unsere StudienassistentInnen:

Dipl.-Ing. Sigrid Kern kern@stat.tu-graz.ac.at

Gordana Antic gantic@sbox.TUGraz.at

Johannes Poglitsch pogo@sbox.TUGraz.at

Günther Sieghartsleitner siegh@sbox.TUGraz.at