Prüfung aus

Stochastische Prozesse für Informatikstudien (506.007)

04. 02. 2008

---

1) Die Anzahl von Störungen N_t in $[0,t)$ in einem vernetzten System sei ein homogener POISSON–Prozess mit Rate $\lambda = 1/4$ pro Stunde.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in den ersten 4 Stunden mindestens eine Störung auf? (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System 6 Stunden ohne Störung funktioniert? (4P)

(c) In einem Zeitraum von 12 Stunden treten 6 Störungen auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es innerhalb der ersten 4 Stunden 2 Störungen? (6P)

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung erst nach 8 Stunden auf? (6P)

---

2) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$, eine homogene MARKOV–Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0,1,2\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen und zeigen Sie, dass es sich um eine reguläre MARKOV-Kette handelt. (8P)

(b) Nach (a) gilt für die Rückkehrwahrscheinlichkeiten aller Zustände i, dass $f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = 1$. Ermitteln Sie für die Zustände 0 und 1 alle Wahrscheinlichkeiten $f_0^{(n)}$ und $f_1^{(n)}$, $n \geq 1$. (8P)

(c) Wie lauten die mittleren Rückkehrzeiten $m_i = \sum_{i=1}^{\infty} n\, f_i^{(n)}$ für die Zustände $i = 0,1$? Woraus ergibt sich die Grenzverteilung (p_0, p_1, p_2)? (4P)
