1) Ein Serienprodukt wird an den Maschinen M1, M2, M3 und M4 hergestellt. 35% der Gesamtproduktion werden auf M1, 30% auf M2, 20% auf M3 und 15% auf M4 produziert. Es wurde festgestellt, dass 2% der von M1, 3% der von M2, 4% der von M3 und 5% der von M4 hergestellten Produkte fehlerhaft sind.

(a) Zeichnen Sie den W-Baum. (4P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Teil fehlerhaft? (6P)

(c) Mit welcher W! wurde ein als fehlerhaft erkanntes Teil von M3 produziert? (6P)

(d) Wie viele Teile müssen geprüft werden, dass die W! wenigstens ein fehlerhaftes Teil zu erhalten, mindestens 95% beträgt? (4P)

---

2) An einem Glücksrad wird ein Zeiger gedreht, der in einer beliebigen Stellung stehenbleiben kann. Das Glücksrad enthält einen Sektor mit dem Zentriwinkel α und die W! p für einen Treffer ist durch $p = \frac{\alpha}{360}$ gegeben.
Die Zufallsvariable $X = \sharp$(Treffer bei n Drehungen).

(a) Welche Verteilung besitzt X? (2P)

(b) Wie groß muss p gewählt werden, damit P(genau 2 Treffer bei 10 Drehungen) möglichst groß wird? (8P)

(c) Es sei $\alpha = 90°$. Wie oft muss das Glücksrad gedreht werden, damit $P_X(X \geq 1) \geq 0.95$? (4P)

(d) Für einen Spieleinsatz von EUR 2,- darf man das Rad zweimal drehen. Für einen Treffer erhält man EUR 3,-, für zwei Treffer EUR 10,-. Ist dieses Spiel fair? (6P)

---

3) Auf einer Hühnerfarm werden Eier produziert, deren Masse X erfahrungsgemäß mit $\mu = 60[g]$ und $\sigma = 8.5[g]$ normalverteilt ist.

(a) Eier, deren Masse kleiner als $50[g]$ oder größer als $80[g]$ ist, werden aussortiert und in eine andere Gewichtsklasse eingeordnet. Wieviel Prozent der Produktion sind das? (6P)

(b) Bei der automatischen Verpackung der Eier werden 3.5% beschädigt. Wie groß ist die W!, dass auf einem Karton mit 30 Eiern höchstens 2 beschädigt sind? (10P)

(c) Unter welchem Gewicht liegen 95% der Eier? (4P)

---

4) Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,xy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Man berechne c. (4P)

(b) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. (6P)

(c) Berechnen Sie $Cov(X, Y)$. (8P)

(d) Sind X und Y stochastisch unabhängig? (2P)

---

5) Sei $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ ein stochastischer Prozeß mit

$$X_t = U \sin 2\pi t \cos 2\pi t,$$

wobei U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable ($U \sim U(0, 1)$).

(a) Berechnen Sie $m_t = E(X_t)$. (4P)

(b) Wie lautet $E(X_t \cdot X_s)$? (6P)

(c) Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion
$K(s, t) = E(X_t \cdot X_s) - m_t \cdot m_s$. (8P)

(d) Ist der Prozess stationär im weiteren Sinn? (2P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen. (4P)

(b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung

$$\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2).$$

(6P)

(c) Wie lauten die mittleren Rückkehrzeiten m_0, m_1, m_2? (4P)

(d) Berechnen Sie

$$P(X_4 = 0 | X_2 = 1) \quad \text{und} \quad P(X_4 = 1 | X_2 = 2).$$

(6P)
