Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse (506.010)

29. 7. 2007

---

1) In einem automatischen Zugangssystem werden die Fingerabdrücke von Personen überprüft. 90% der Personen sind registriert und haben eine Zugangsberechtigung. Der Fingerabdruck der registrierten Personen wird beim ersten Mal in 95% der Fälle akzeptiert, und von den nicht registrierten Personen werden fälschlicherweise 3% akzeptiert. Jene Personen, die beim ersten Mal nicht akzeptiert wurden, haben einen zweiten Versuch. Dabei werden 98% der registrierten Personen akzeptiert und 1% der nicht registrierten.

(a) Zeichnen Sie den zugehörigen W-Baum. (6P)

(b) Wie groß ist die W!, dass eine Person richtig eingeordnet wird? (6P)

(c) Eine Person wurde abgewiesen. Mit welcher W! ist diese registriert? (8P)

---

2) Die Lebensdauer X [in Jahren] eines Speicherchips in einer Workstation habe eine Verteilung mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$? (6P)

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (8P)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Chip mindestens 3 und höchstens 6 Jahre hält? (6P)

---

3) Eine entschlossene Minderheit kann bei einer uninteressierten Mehrheit einen unverhältnismäßig großen Einfluss ausüben:

(a) Der Senat der TU Graz hat 24 Mitglieder. Sechs dieser 24 Mitglieder sind Studenten und wollen gemeinsam mit den 3 Assistenten einen Antrag durchbringen. Die übrigen 15 Mitglieder stimmen zufällig ab (z.B. durch Werfen einer Münze). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Vorschlag angenommen wird (einfache Mehrheit)? (10P)

(b) Die Stadt Graz hat 156.000 Wahlberechtigte. In einer wichtigen Frage wird eine Volksabstimmung durchgeführt. 500 Wahlberechtigte sind entschlossen mit JA zu stimmen; alle anderen treffen eine Zufallsentscheidung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mit einer Mehrheit der JA Stimmen zu rechnen? *(Approximieren Sie die zu berechnende Wahrscheinlichkeit durch die Normalverteilung.)* (10P)

---

4) Die Anzahl N_t von Unfällen in einem Werk sei ein homogener POISSON-Prozess mit Rate $\lambda = 6$ pro Jahr.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt im ersten Halbjahr höchstens ein Unfall ein? (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 8 Monaten mindestens zwei Unfälle passieren? (4P)

(c) Innerhalb von 2 Jahren sind 4 Unfälle aufgetreten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ereignete sich dabei genau ein Unfall im ersten Halbjahr? (6P)

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der zweite Unfall erst nach 9 Monaten auf? (6P)

---

5) Ein Skriptum besteht aus 100 Blättern und 2 festen Einbanddeckeln aus Karton. Die Papierdicke der Blätter sei $N(0.1, 0.02)$-verteilt und die Kartondicke sei $N(0.3, 0.06)$-verteilt [*Messeinheiten in mm*].

(a) Welche Verteilung besitzt die Dicke des Skriptums? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese zwischen 10 mm und 11 mm? (8P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 100 Blätter dünner als 9.5 mm sind? (6P)

(c) Die Skripten werden in Schachteln mit einer Innenhöhe von 245 mm aufbewahrt. Wieviele Skripten kann man maximal in eine Schachtel geben, sodass diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % nicht überfüllt ist? (6P)

---

6) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene MARKOV-Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen und zeigen Sie, dass es sich um eine reguläre MARKOV-Kette handelt. (8P)

(b) Berechnen Sie Grenzverteilung und die mittleren Rückkehrzeiten für jeden Zustand. (12P)
