Prüfung aus
Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse (506.010)

17.06.2005

---

1) 80% der in einer Radaranlage eintreffenden Signale sind mit einer Störung überlagerte Nutzsignale, 20% sind reine Störungen. Aus Erfahrung weiß man, dass beim Empfang eines gestörten Nutzsignals die Anlage die Ankunft eines Nutzsignals mit Wahrscheinlichkeit 0.95 anzeigt. Beim Empfang der reinen Störung zeigt sie die Ankunft eines Nutzsignals mit Wahrscheinlichkeit 0.3 an.

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsbaum. (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anlage ein Nutzsignal anzeigt? (4P)

(c) Die Anlage zeigt ein Störsignal an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das empfangenen Signal aus einer reinen Störung stammt? (6P)

(d) Die Anlage zeigt ein Nutzsignal an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich ein gestörtes Nutzsignal empfangen wurde? (6P)

---

2) Bei einem gefälschten Würfel besitzt die Zufallsvariable X = Augenzahl folgende Verteilung:

k	1	2	3	4	5	6
$P_X(X=k)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	p

(a) Man bestimme $P_X(X=6)=p$. (4P)

(b) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_X(X=k)$ und die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (6P)

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$. (6P)

(c) Bestimmen Sie den Median $x_{0.5}$, gegeben durch $P_X(X < x_{0.5}) \leq 1/2$ und $P_X(X > x_{0.5}) \leq 1/2$. (4P)

---

3) Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = c\,e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Man bestimme die Konstante c. (4P)

(b) Stellen Sie die Dichte für $\lambda = 1$ graphisch dar. (4P)

(c) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F_X(x)$? (8P)

(d) Wie groß ist $\mathrm{E}(X)$? (4P)

---

4) Eine Maschine erzeugt Papier für die Luftpostbriefe. Die Gewichte der Briefe sind erfahrungsgemäß normalverteilt mit $\mu = 2\text{g}$ und $\sigma = 0.4\text{g}$.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Brief mehr als 2.5g? (4P)

(b) Eine Packung enthält 200 Briefe. Welche Verteilung hat das Gewicht einer Packung? (4P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Gewicht einer zufällig ausgewählten Packung zwischen 390g und 410g? (6P)

(d) Auf welchen Wert müßte man die Streuung σ des Gewichts der Briefe verringern, damit das Gewicht einer 200-er Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% unter 405g liegt? (6P)

---

5) Die Anzahl N_t von Unfällen in einem Werk sei ein homogener POISSON-Prozess mit Rate $\lambda = 4$ pro Jahr.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten im ersten Halbjahr mindestens 2 Unfälle ein? (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 8 Monaten höchstens ein Unfall passiert? (4P)

(c) Innerhalb von 2 Jahren treten 6 Unfälle auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt im ersten Halbjahr ein Unfall auf? (6P)

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der zweite Unfall erst nach 7 Monaten auf? (6P)

---

6) Ein Spieler besitzt einen Euro. Er nimmt an einem Glücksspiel teil, bei dem er mit Wahrscheinlichkeit 1/2 den doppelten Einsatz zurückerhält oder seinen gesamten Einsatz verliert. Er entschließt sich solange zu spielen bis er entweder 5 Euro hat oder alles verloren hat und überlegt sich dabei folgende Spielstrategie: Habe ich k Euro, setze ich $\min(k, 5-k)$ Euro. (Bsp.: Besitzt er gerade 3 Euro, so setzt er 2 Euro.)

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen der homogenen MARKOFF-Kette mit Zustandsraum $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. (10P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht der Spieler 5 Euro (also den absorbierenden Zustand 5)? (10P)
