Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie
und Stochastische Prozesse
(507.010)

24. 06. 2004

---

1) Ein Team von drei StudentInnen, Lukas, Georg und Susanne, beantwortet Fragen bei einem Quiz. Eine Frage wird von Lukas mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, von Georg mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und von Susanne mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ beantwortet. Die Wahrscheinlichkeiten für richtige Antworten sind: Lukas $\frac{4}{5}$, Georg und Susanne jeweils $\frac{3}{5}$.

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen W–Baum. (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Team eine Frage richtig beantwortet? (6P)

(c) Das Team hat falsch geantwortet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das Georg? (6P)

(d) Es werden 10 Fragen gestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass vom Team mindestens 8 Fragen richtig beantwortet werden? (4P)

---

2) Bei einem Glücksrad ist die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer durch $p = \frac{\alpha}{360}$ gegeben. Die einzelnen Drehungen werden als voneinander unabhängig angesehen.

(a) Wie groß muss p bzw. der Winkel α gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit *bei* $n = 10$ *Drehungen genau zwei Treffer zu erzielen*, maximal wird? (8P)

(b) Es sei $p = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$. Wie oft muss das Glücksrad gedreht werden, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens einen Treffer zu erzielen größer als 0.95 wird? (6P)

(c) Für einen Spieleinsatz von EUR 2,– darf man das Glücksrad zweimal drehen. Bei einem Treffer erhält man EUR 3,–, bei zwei Treffern EUR 12,–, sonst erhält man nichts. Wie lautet die Verteilung des Gewinns G? Berechnen Sie den Erwartungswert $E(G)$. Ist das Spiel fair? (6P)

---

3) Bestimmen Sie die Konstanten a und b derart, dass gilt: $P_X(X \leq a) = 0.25$ und $P_X(X \geq b) = 0.6$, falls die Zufallsvariable X

(a) exponentialverteilt mit $\lambda = 1/4$, (6P)

(b) $N(4, 2)$–verteilt, (8P)

(c) gleichverteilt auf $[-2, 6]$. (6P)

---

4) Die Lebensdauer X elektronischer Bauteile (in h) lässt sich durch folgende W–Dichte beschreiben

$$f_X(x) = \begin{cases} a^2\,x\,e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Es sei $a = 1/2000$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (8P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 800$ und $t_2 = 1100$ ausfällt? (6P)

(c) Welche Wahrscheinlichkeit ist größer, dass ein Bauteil nach dem Zeitpunkt $t_3 = 2100$ ausfällt, oder dass ein Bauteil vor dem Zeitpunkt $t_4 = 1500$ ausfällt? (6P)

---

5) Die Anzahl von Störungen N_t in $[0,t)$ in einer Produktionslinie von Handys sei ein homogener POISSON–Prozess mit Rate $\lambda = 1/20$ pro Zeiteinheit.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt im Intervall $[0,6)$ mindestens eine Störung auf? (4P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in $[2,8)$ eine und in $[8,12)$ keine Störung auf? (6P)

(c) Es sei in $[0,4)$ keine Störung aufgetreten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in $[4,8)$ eine Störung auf? (4P)

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung erst nach 10 Zeiteinheiten auf? (6P)

---

6) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$, eine homogene MARKOV–Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0,1,2\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Man berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten
$P(X_2 = 0 | X_1 = 2, X_0 = 1)$ und $P(X_2 = 0, X_1 = 2 | X_0 = 1)$. (6P)

(c) Man berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit
$P(X_{n+1} = 2, X_n = 1 | X_{n-1} = 0)\,, n \geq 2$. (4P)

(d) Für die Anfangsverteilung $\mathbf{p}^{(0)} = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ berechne man
$P(X_1 = 1)$ und $P(X_1 = 1, X_2 = 0)$. (6P)
