Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse Telematik

27. 06. 2003

1) Ingenieure entwickeln ein automatisches Testverfahren für GPS-Handys. Es sei bekannt, dass 2% der Handys defekt sind. Die bisherige Erfahrung zeigt, dass der Test in 4% der Fälle ein *falsch positives* und in 1% der Fälle ein *falsch negatives* Ergebnis liefert.

   (a) Zeichnen Sie den W-Baum. (6P)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht der Test negativ aus? (6P)

   (c) Man berechne die W!, dass ein GPS-Handy, das den Test nicht bestand, tatsächlich einen Fehler hat. (8P)

---

2) Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,(2x - x^2), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die Konstante c. (5P)

   (b) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (5P)

   (c) Berechnen Sie $E(X)$. (5P)

   (d) Berechnen Sie $P_X(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$. (5P)

---

3) Das Café auf der Acconci-Insel hat maximal 120 Sitzplätze. Zu einer geschlossenen Veranstaltung werden 130 Personen eingeladen. Aus Erfahrung weiß man, dass im Mittel 10% der eingeladenen Personen nicht erscheinen.

   (a) Sei $X=$ *Anzahl der eingeladenen Personen*, die kommen. Geben Sie die Verteilung von X an. Wie lauten $E(X), Var(X)$? (6P)

   (b) Approximieren Sie die W!, dass alle Personen, die kommen, auch einen Sitzplatz erhalten, durch die Normalverteilung. (8P)

   (c) Wieviele Einladungen dürfen höchstens verschickt werden, damit die W! in (b) mindestens 0.95 beträgt? (6P)

---

4) Ein Gerät besteht aus 2 Einzelteilen T_1 und T_2. Die Zufallsvariable X_1 bzw. X_2 beschreibe die Anzahl der Reparaturen, die innerhalb eines Jahres an T_1 bzw. T_2 vorgenommen werden müssen. X_1 und X_2 seien unabhängige Zufallsvariable. Die Verteilungen seien wie folgt gegeben:

i	0	1	2	3
$P_{X_1}(X_1 = i)$	0.1	0.5	0.3	0.1

j	0	1	2
$P_{X_2}(X_2 = j)$	0.1	0.5	0.4

(a) Mit welcher W! muss das Gerät *höchstens einmal* pro Jahr repariert werden? (6P)

(b) Berechnen Sie $E(X_1), E(X_2)$ und $Var(X_1), Var(X_2)$. (8P)

(c) Es seien $Y_1 = 2X_1 + 1$ bzw. $Y_2 = 3X_2$ die jährlichen Betriebskosten von T_1 bzw.T_2 und $Z = Y_1 + Y_2$ die jährlichen Betriebskosten des Geräts. Wie lauten $E(Z)$ und $Var(Z)$? (6P)

---

5) Sei $\{N_t | \, t \geq 0\}$ ein homogener POISSON-Prozess mit Intensität $\lambda = 6$, der mittleren Anzahl von Zugriffen pro Minute auf einen Institutsserver.

(a) Mit welcher W! gibt es in 30 Sekunden mindestens zwei Zugriffe? (4P)

(b) Mit welcher W! gibt es in $[0.75, 1)$ einen Zugriff und in $[2, 2.5)$ zwei Zugriffe? (Einheit = 1 Minute) (6P)

(c) Es sei in $[0, 0.25)$ kein Zugriff aufgetreten. Mit welcher W! gibt es dann in $[0.25, 1)$ 5 Zugriffe? (4P)

(d) Mit welcher W! tritt der dritte Zugriff erst nach 30 Sekunden auf? (6P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen. (4P)

(b) Berechnen Sie die zweistufige Übergangsmatrix $\mathbf{P^2}$. (8P)

(c) Wie lauten $P(X_3 = 1 | \, X_1 = 0)$ und $P(X_3 = 0 | \, X_1 = 1)$. (4P)

(d) Unter Vorliegen der Anfangsverteilung

$$P(X_0 = 0) = \frac{1}{5}, \quad P(X_0 = 1) = \frac{3}{5}, \quad P(X_0 = 2) = \frac{1}{5}$$

berechne man $P(X_1 = 1)$. (4P)
