Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse (506.010)

13. 05. 2005

---

1) Bei einer Qualitätskontrolle können Werkstücke zwei Fehler haben, den Fehler A und den Fehler B. Es seien folgende Werte bekannt. Mit Wahrscheinlichkeit 0.05 hat ein Werkstück den Fehler A, mit Wahrscheinlichkeit 0.01 hat es beide Fehler und mit Warhscheinlichkeit 0.03 nur den Fehler B.

(a) Man berechne $P(B)$ und $P(A \cup B)$. (6P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Werkstück genau einen der beiden Fehler besitzt? (4P)

(c) Bei einem Werkstück wurde der Fehler A festgestellt, während die Untersuchung auf Fehler B noch nicht erfolgt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch den Fehler B? (6P)

(d) Sind die Ereignisse A und B unabhängig? (4P)

---

2) 2% der Bevölkerung sind Diabetiker. Sei $X = \#(\text{Diabetiker unter } n \text{ Personen})$. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter $n = 100$ zufällig ausgewählten Personen mindesten 3 Diabetiker sind,

(a) mit Hilfe der Binomialverteilung, (6P)

(b) mit Hilfe der POSSON-Verteilung, (6P)

(c) mit Hilfe der Normalverteilung. (8P)

---

3) X_i sei das Ergebnis der i-ten Messung $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einer physikalischen Kenngrösse. Es gelte $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$.

(a) Wieviele voneinander unabhängige Messungen der Kenngrösse müssen durchgeführt werden, damit für das arithmetische Mittel

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ der Messergebnisse gilt, dass $P_{\overline{X}}(|\overline{X} - \mu| \leq \sigma/5) \geq 0.9$? (10P)

(b) Wie lautet das Ergebnis, wenn bekannt ist, dass die Messergebnisse X_i normalverteilt $(X_i \sim N(\mu, \sigma))$? (10P)

---

4) Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = c\,\sin(x+y)\,;\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,,\; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\,.$$

(a) Man bestimme die Konstante c. (8P)

(b) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$? (6P)

(c) Man berechne $E(X)$. (6P)

---

5) Die Anzahl von Störungen N_t in $[0,t)$ in einem vernetzten System sei ein homogener POISSON–Prozess mit Rate $\lambda = 1/8$ pro Stunde.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in den ersten 8 Stunden höchstens eine Störung auf? (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System 10 Stunden ohne Störung funktioniert? (4P)

(c) In einem Zeitraum von 24 Stunden treten 5 Störungen auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es innerhalb der ersten 8 Stunden 2 Störungen? (6P)

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung erst nach 16 Stunden auf? (6P)

---

6) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$, eine homogene MARKOV–Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0,1,2\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen und zeigen Sie, dass es sich um eine reguläre MARKOFF-Kette handelt. (8P)

(b) Berechnen Sie Rückkehrwahrscheinlichkeiten, die mittleren Rückkehrzeiten für jeden Zustand, sowie die Grenzverteilung. 12P)
