Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse (507.010)

14. 05. 2004

---

1) Ein Computerhersteller erhält aus China regelmäßig Lieferungen mit je 2000 Speicherchips, wovon ein Anteil p fehlerhaft ist.
Folgende Annahmekontrolle wird durchgeführt:
Man entnimmt aus der Lieferung eine Stichprobe (mit Zurücklegen) von zehn Speicherchips. Sind alle zehn Chips in Ordnung (Ereignis B_0) wird die Lieferung angenommen. Sind zwei oder mehr Chips defekt (Ereignis B_2) wird die ganze Sendung zurückgeschickt. Ist nur ein Chip fehlerhaft (Ereignis B_1), dann wird eine zweite Stichprobe von 20 Stück entnommen. Sind in der zweiten Stichprobe alle Chips fehlerfrei, wird die Lieferung angenommen, andernfalls zurückgeschickt.

(a) Zeichnen Sie den W-Baum. (4P)

(b) Berechnen Sie $P(B_0), P(B_1), P(B_2)$. (4P)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung angenommen wird, wenn 5% der Chips fehlerhaft sind? (6P)

(d) Eine Sendung mit 5% fehlerhaften Chips wurde abgelehnt. Mit welcher W! war das aufgrund der ersten Stichprobe? (6P)

---

2) Ein Spieler setzt einen Euro (Einsatz = 1 Euro) auf die Augenzahl x und würfelt dann zweimal. Erscheint x einmal, dann gewinnt er den doppelten Einsatz, erscheint x zweimal, dann gewinnt er den vierfachen Einsatz. Erscheint x nie, verliert er seinen Einsatz.

(a) Mit welcher W! verliert der Spieler seinen Einsatz? (6P)

(b) Mit welcher W! gewinnt er den doppelten bzw. vierfachen Einsatz? (6P)

(c) Sei X = Gewinn. Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.
Ist das Spiel fair? (8P)

---

3) Die Zufallsvariable X besitze folgende Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 2ax & 0 < x < 1 \\ 3a - ax & 1 \le x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante a. (4P)

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (8P)

(c) Skizzieren Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$. (4P)

(d) Wie lautet $E(X)$? (4P)

4) Bei einer Gewichtskontrolle von 1 kg-Paketen wurde festgestellt, dass das Gewicht normalverteilt ist mit $\mu = 1.1$ und $\sigma = 0.2$

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein zufällig ausgewähltes Paket weniger als 1 kg? (4P)

(b) Jenseits welchen Gewichtes befinden sich die 6% schwersten Pakete? (6P)

(c) Wieviele Pakete darf man höchstens transportieren, damit das Gesamtgewicht von 100 kg mit einer W! von mindestens 95% nicht überschritten wird? (10P)

---

5) Der stochastische Prozess $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ sei ein *Moving-Average-Prozess* erster Ordnung, d.h.

$$X_n = a + Z_n + bZ_{n-1}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, Z_n unabhängig und identisch verteilt nach F mit $E(Z_n) = 0$, $Var(Z_n) = \sigma^2$.

(a) Berechnen Sie $m_n = E(X_n)$ und $Var(X_n)$. (8P)

(b) Wie lautet die Kovarianzfunktion $K(n, m)$? Berechnen Sie $K(n, n+1)$ und $K(n, n+j); j \geq 2$.
Ist der Prozess stationär im weiteren Sinn? (12P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ habe folgende Übergangsmatrix :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Zeigen Sie, dass der Zustand 1 positiv rekurrent ist.
Wie lautet $m_1 = E(T_1)$?

Hinweis: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$, $|\, q \,| < 1$ (8P)

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten
$P(X_3 = 1 | X_1 = 2)$, $P(X_3 = 2 | X_1 = 3)$. (8P)
