Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse Telematik

16. 05. 2003

---

1) In einem Assessment-Center werden 128 Bewerber für die Aufnahme in einen bestimmten Berufslehrgang getestet. Dabei werden die Ergebnisse der Aufnahmetests mit den Durchschnittsnoten der Schulabschlusszeugnisse verglichen. Man betrachtet dabei folgende Ereignisse.

A_1 = ausgezeichneter Aufnahmetest, A_2 = sehr guter Aufnahmetest,
A_3 = durchschnittlicher Aufnahmetest.
N_1 = sehr guter Notendurchschnitt, N_2 = guter Notendurchschnitt,
N_3 = mittelmäßiger Notendurchschnitt.

	A_1	A_2	A_3
N_1	20	8	4
N_2	24	32	8
N_3	6	10	16

Für einen zufällig herausgegriffenen Bewerber berechne man folgende Wahrscheinlichkeiten.

(a) $P(N_1), P(A_2), P(A_3)$ (6P)

(b) $P(A_1|N_2), P(N_2|A_1)$ (6P)

(c) $P(A_1|N_1 \cup N_2), P(A_2|N_1 \cup N_2), P(N_2 \cup N_3|A_1)$ (8P)

---

2) Es soll überprüft werden, ob eine Warenlieferung von 64 Stück angenommen werden soll. Dazu wird folgender Stichprobenplan *(Ziehen ohne zurücklegen)* durchgeführt. Zunächst wird eine Stichprobe vom Umfang 4 entnommen. Falls sich darunter *kein* Ausschussstück befindet, wird die Lieferung angenommen. Sind zumindest *zwei* Stück Ausschuss, dann wird die Lieferung abgelehnt. Ist *genau ein* Ausschussstück dabei, dann wird eine zweite Stichprobe vom Umfang 8 entnommen. Falls sich *kein* Ausschussstück in dieser zweiten Stichprobe befindet, wird die Lieferung angenommen, andernfalls endgültig abgelehnt. Eine Lieferung enthalte 3 *defekte Bauteile.*

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) muss eine zweite Stichprobe entnommen werden? (4P)

(b) wird diese Lieferung angenommen? (8P)

(c) wurden bei einer Annahme zwei Stichproben geprüft? (8P)

---

3) Die ZV X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^3(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c. (4P)

(b) Man berechne die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (4P)

(c) Wie lauten $E(X)$ und $Var(X)$? (8P)

(d) Berechnen Sie $P_X(0.4 < X \le 0.8)$. (4P)

---

4) Die Zufallsvariablen V und D bezeichnen die Längen eines Diplomarbeitsvortrages und der anschließenden Diskussion. Dabei sei

$E(V) = 15\,[\text{min}],\ E(D) = 5\,[\text{min}],\quad Var(V) = 8\,[\text{min}^2],\ Var(D) = 2\,[\text{min}^2],$

$\rho(V, D) = -0.5.$

(a) Wie lautet $E(G) = E(V + D)$? (4P)

(b) Bestimmen Sie $E(V \cdot D), Cov(V, G)$ und $Var(G)$. (16P)

---

5) Sei $\{N_t | \, t \ge 0\}$ ein homogener POISSON-Prozess mit Intensität $\lambda = 4$, der mittleren Anzahl von Störfällen pro Jahr in einer Papierfabrik.

(a) Mit welcher W! treten im Jahr *höchstens zwei* Störfälle auf? (4P)

(b) Mit welcher W! tritt die vierte Störung erst nach 2 Jahren auf? (8P)

(c) Angenommen es treten in 3 Jahren 6 Störungen auf. Mit welcher W! treten im 1. Jahr 2 Störungen auf? (8P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix $(0 < p < 1,\ 0 < q < 1)$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-q & 0 & q \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Zeigen Sie, dass der Zustand 0 ein rekurrenter Zustand ist, d.h.

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_0^{(n)} = 1\,.$$

(8P)

(c) Verifizieren Sie, dass die mittlere Rückkehrzeit

$$m_0 = E(T_0) = \frac{3 - 2p - 2q + pq}{1-q}\,.$$

(8P)
