Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse (506.010)

9. 3. 2007

---

1) Zwei-Finger Morra. Zwei Spieler A und B heben gleichzeitig *jeweils einen* oder *zwei* Finger hoch. Stimmen die Anzahlen der gezeigten Finger überein, so erhält A von B so viele Euro wie *insgesamt Finger* gezeigt wurden (also 2 oder 4). Stimmen diese nicht überein, so erhält B von A 3 Euro. Man nehme an, dass Spieler A (B) mit W! p_A (p_B) *einen Finger*, mit W! $1 - p_A$ ($1 - p_B$) *zwei Finger* hebt, wobei A und B ihre Wahl unabhängig von einander treffen.

(a) Geben Sie den entsprechenden W–Raum $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ an. (4P)

(b) Sei die Zufallsvariable $X =$ *Gewinn von Spieler A* (ein negativer Wert von X ist als Verlust zu verstehen). Wie lautet die W–funktion $P_X(X = k)$? (6P)

(c) Man berechne den Erwartungswert $E(X)$ als Funktion von p_A und p_B. (6P)

(d) Ist das Spiel fair ($E(X) = 0$), wenn Spieler B $p_B = 7/12$ wählt? (4P)

---

2) Eine Firma entwickelt einen Doping-Schnelltest. Es wird davon ausgegangen, dass 20% der Personen einer Sportart Dopingmittel nehmen. Falls ein Sportler gedopt ist, dann fällt der Test mit W! 0.99 positiv aus. Falls er nicht gedopt ist, kommt es mit W! 0.90 auch zu einem negativen Testergebnis. Man entscheidet sich für folgende Vorgangsweise: Bei einem positiven Ergebnis wird derselbe Test nochmals wiederholt und das Ergebnis des zweiten Tests als Befund angesehen. Bei einem negativen Ergebnis wird nicht weiter getestet.

(a) Zeichnen Sie den W–Baum. (4P)

(b) Mit welcher W! ist das Testergebnis positiv? (8P)

(c) Mit welcher W! hat der Sportler gedopt, obwohl das Testergebnis negativ ausgefallen ist (false negative). (8P)

---

3) Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ c_1 x^2 + 2c_1 x + c_2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x < \infty \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2. (8P)

(b) Wie lautet die Dichte $f_X(x)$? (4P)

(c) Stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar. (4P)

(d) Berechnen Sie $E(X)$. (4P)

---

4) Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-x}/y^3 & \text{wenn} \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad y \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (4P)

(b) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y. (6P)

(c) Sind X und Y unabhängig? (Begründung!) (4P)

(d) Bestimmen Sie $E(X \cdot Y)$. (6P)

---

5) Seien U und V zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu_U = \mu_V = 0$ und Varianz $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$. Weiters sei der stochastische Prozess X_t gegeben durch:

$$X_t = U \sin(2\pi t) + V \cos(2\pi t).$$

(a) Bestimmen Sie $m_t = E(X_t)$. (5P)

(b) Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion $K(s,t)$. (10P)
Hinweis: $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

(c) Ist der Prozess im weiteren Sinne stationär? (Begründung!) (5P)

---

6) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene MARKOV–Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen, und
bestimmen Sie den Rand R der Matrix. (6P)

(b) Wir starten mit der Startverteilung $\mathbf{p}^{(0)} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 \in R$? (6P)

(c) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Schritte bis zur Absorbtion. (8P)
