1) Eine große Firma hat ein biometrisches Kontrollsystem (Gesichtskontrolle) implementiert. Man nehme an, dass 90% der ankommenden Personen registriert sind und die Berechtigung zum Zugang besitzen. Eine registrierte Person wird beim ersten Mal in 5% der Fälle abgewiesen *(Falschrückweisungsrate FRR)*; von den nicht registrierten Personen werden fälschlicherweise 2% akzeptiert *(False Accept Rate FAR)*. Jede Person, die beim ersten Mal nicht akzeptiert wurde, hat einen zweiten Versuch. Dabei werden 98% der registrierten Personen akzeptiert, aber auch 1% der nicht registrierten.

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen W–Baum. (6P)

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person falsch eingeordnet wird? (6P)

(c) Eine Person wurde akzeptiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person auch registriert? (8P)

---

2) Ein Ferienhotel in einem österreichischen Wintersportort hat einen Vertrag mit einem Reisebüro für ein Kontingent von 66 Betten. Auf Grund der großen Nachfrage nimmt das Reisebüro 68 Buchungen vor. Aus Erfahrung weiß man, dass 5% der Reservierungen nicht in Anspruch genommen werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Hotel *mindestens eine Person* wegen Überbuchung umquartieren muss.

(a) Wie lautet die exakte Lösung? (8P)

(b) Benutzen Sie die POISSON–Verteilung als Näherung. (6P)

(c) Welches Ergebnis liefert die Approximation durch die Normalverteilung? (6P)

---

3) Die Lebensdauer elektronischer Bauteile [in 1000h] läßt sich durch die Zufallsvariable $X \sim \gamma(2, \lambda)$ beschreiben, d.h.

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x)\,, \quad x > 0\,.$$

Sei $\lambda = 1/100$.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil erst nach dem Zeitpunkt $t_0 = 50$ ausfällt? (4P)

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 40$ und $t_2 = 60$ ausfällt? (6P)

(c) Wie lauten $f_X(x)$, $E(X)$, $Var(X)$? (6P)

(d) Welchen Zeitpunkt t_3 überlebt ein Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 (Näherungslösung)? (6P)

---

4) Die gemeinsame Dichte von X, der Gesamtzeit [min] zwischen der Ankunft eines Kunden in einer Warteschlange und dem Verlassen des Systems nach der Bedienung, und Y, der Zeit [min], die ein Kunde in der Warteschlange verbringt bevor er bedient wird, ist gegeben durch

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,e^{-x^2} & 0 < y < x < \infty \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (8P)

(b) Wie lautet die Randdichte $f_X(x)$? (6P)

(c) Zeigen Sie, dass die bedingte Dichte $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ die Dichte einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, x)$ darstellt. (6P)

---

5) Sei $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ ein stochastischer Prozess mit

$$X_t = Ut \sin 2\pi t\,,$$

wobei U eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable ($U \sim U(0,1)$).

(a) Berechnen Sie $m_t = E(X_t)$. (4P)

(b) Wie lautet $E(X_t \cdot X_s)$? (6P)

(c) Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion
$K(s,t) = E(X_t \cdot X_s) - m_t \cdot m_s$. (8P)

(d) Ist der Prozess stationär im weiteren Sinn? (2P)

---

6) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$, eine homogene MARKOV–Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0,1,2\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Man zeige, dass der Zustand 0 rekurrent ist, d.h. $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_0^{(n)} = 1$. (8P)

(c) Man bestimme $m_0 = E(T_0)$. (8P)
