Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

11. 03. 2005

---

1) In einer bestimmten Sportart nehmen 10% der Profisportler verbotene Substanzen zu sich. Bei einer Dopingkontrolle wird eine A-Probe und eine B-Probe entnommen. Ein gedopter Sportler wird durch den Dopingtest mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.98 als gedopt eingestuft (*positive Probe*). Ein nicht gedopter Sportler wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.03 fälschlicherweise als gedopt eingestuft. Die B-Probe wird nur dann ausgewertet, wenn die A-Probe ein positives Testresultat liefert.

(a) Zeichnen Sie den zugehörigen W–Baum. (6P)

(b) Wie groß ist die W!, dass bei einem Sportler die A-Probe positiv ist? (4P)

(c) Wie groß ist die W!, dass bei einem *nicht gedopten* Sportler beide Proben positiv sind? (4P)

(d) Beide Proben waren positiv. Mit welcher W! war der Sportler gedopt? (6P)

---

2) In einer Produktion von 512 USB–Sticks befinden sich $M = 32$, die nicht die Qualitätsnorm A erfüllen. Es werden $n = 16$ Sticks *ohne Zurücklegen* gezogen. Es bezeichne $X = \#$ (USB–Sticks, die die Norm A nicht erfüllen).

(a) Geben Sie die Formel für die exakte W–Funktion von X, sowie $E(X)$ und $Var(X)$ an. (6P)

(b) Wie lautet die Approximation durch die Binomialverteilung (nur Angabe der Formel)? (4P)

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_X(1 \leq X \leq 3)$ mit Hilfe der

(i) POISSON–Approximation,

(ii) Normalapproximation. (10P)

3) Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x < 1 \\ \frac{c}{x^2} & 1 \leq x < 3. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (4P)

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F_X(x)$? (4P)

(c) Stellen sie die Dichtefunktion $f_X(x)$ und die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ graphisch dar. (4P)

(d) Berechnen Sie $P_X(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$ und $E(X)$. (8P)

4) Das Skriptum besteht aus 185 Blättern und 2 festen Einbanddeckeln aus Karton. Die Papierdicke der Blätter sei $N(10,2)$–verteilt und die Kartondicke sei $N(30,6)$–verteilt [*Meßeinheiten in* $\frac{1}{100}$ *mm*].

(a) Welche Verteilung besitzt die Dicke eines Skriptums *mit* Einband?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese zwischen 18 *mm* und 20 *mm*? (8P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 185 Blätter dünner als 15 *mm* sind? (6P)

(c) Die Skripten werden in Schachteln mit einer Innenhöhe von 245 *mm* aufbewahrt. Wieviel Skripten kann die Sekretärin in eine Schachtel geben, sodass diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.5 nicht überfüllt ist? (6P)

<u>Hinweis:</u> Bitte Maßstäbe beachten!

5) Der stochastische Prozess $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ sei ein *Moving-Average-Prozess* zweiter Ordnung, d.h.

$$X_n = a + Z_n + bZ_{n-1} + cZ_{n-2}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, Z_n unabhängig und identisch verteilt nach F mit $E(Z_n) = 0$, $Var(Z_n) = \sigma^2$.

(a) Berechnen Sie $m_n = E(X_n)$ und $Var(X_n)$. (8P)

(b) Zeigen Sie für die Kovarianzfunktion, dass $K(n, n+1) = b(1+c)\sigma^2$ und $K(n, n+2) = c\sigma^2$. (12P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen. (4P)

(b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung

$$\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2).$$

(6P)

(c) Wie lauten die mittleren Rückkehrzeiten m_0, m_1, m_2? (4P)

(d) Berechnen Sie

$$P(X_3 = 1 | X_1 = 0) \quad \text{und} \quad P(X_3 = 0 | X_1 = 2).$$

(6P)