Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse (507.010)

12. 03. 2004

---

1) In einer Urne befinden sich fünf rote, fünf grüne und vier blaue Kugeln. Man zieht *dreimal hintereinander* (i) ohne Zurücklegen und (ii) mit Zurücklegen. Man berechne für (i) und (ii) jeweils die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

(a) Von jeder Farbe genau eine Kugel zu ziehen. (6P)

(b) Drei Kugeln mit gleicher Farbe zu ziehen. (6P)

(c) Zuerst zwei rote und dann keine blaue Kugel zu ziehen. (4P)

(d) Im zweiten und dritten Zug zwei Kugeln mit gleicher Farbe zu ziehen, unter der Bedingung, dass im ersten Zug eine blaue Kugel gezogen wurde. (4P)

---

2) Die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Stich einer Anophelesmücke eine Malariaerkrankung auftritt, beträgt 2%.

(a) Wie groß ist die W!, dass von 150 gestochenen Personen höchstens zwei Personen an Malaria erkranken? Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $X = \sharp$(Personen, die an Malaria erkrankt sind)? Wie lautet $E(X)$ und $Var(X)$? (8P)

(b) Es wurden 1000 Personen gestochen. Wie lautet die W!, dass mindestens 18 und höchstens 22 Personen an Malaria erkranken? Approximieren Sie diese W! durch
(i) die POISSON- Verteilung,
(ii) die Normalverteilung. (12P)

---

3) Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 1 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante b. (4P)

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F_X(x)$? (4P)

(c) Stellen Sie $F_X(x)$ und $f_X(x)$ graphisch dar. (6P)

(d) Berechnen Sie $E(X)$ und den Median $x_{0.5}$, gegeben durch $F_X(x_{0.5}) = \frac{1}{2}$. Gilt $x_{0.5} < E(X)$? (6P)

---

4) Die Schneefallmengen [in cm] im Dezember, Jänner und Februar am Loser bei Bad Aussee werden als unabhängig normalverteilte Zufallsvariable $D \sim N(40, 8)$, $J \sim N(90, 16)$, $F \sim N(100, 20)$ angesehen.

(a) Wie lautet die Verteilung der Gesamtschneefallmenge in den drei Wintermonaten? (4P)

(b) Geben Sie die Verteilung des über 5 Jahre gebildeten Mittelwertes der Schneefallmengen im Dezember und Jänner zusammen an. (8P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneit es im Jänner mehr als im Februar? (8P)

---

5) Sei $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ ein stochastischer Prozeß mit

$$X_t = A \cos \omega t$$

wobei $A \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $E(A) = \mu$ und $Var(A) = \sigma$.

(a) Berechnen Sie $m_t = E(X_t)$ und ${\sigma_t}^2 = Var(X_t)$. (6P)

(b) Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion $K(s, t) = E(X_s \cdot X_t) - m_t \cdot m_s$. (8P)

(c) Wie lautet die Korrelationsfunktion $\rho(s, t)$? (4P)

(d) Ist der Prozess stationär im weiteren Sinn? (2P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Bei gegebener Anfangsverteilung $\mathbf{p}^{(0)} = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ berechne man $\mathbf{p}^{(1)}$. (6P)

(c) Wie lautet die Grenzverteilung $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$? (10P)
