Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse Telematik

14. 03. 2003

---

1) In einer Bevölkerungsschicht leidet ein Anteil p an einer bestimmten Krankheit. Ein medizinischer Test erkennt die vorhandene Krankheit zu 95% *(richtig positiv)*, diagnostiziert aber die Krankheit auch bei gesunden Personen mit einer W! von 3% *(falsch positiv)*.

(a) Zeichnen Sie den W–Baum. (4P)

(b) Man testet eine zufällig gewählte Person. Wie groß ist die W! eines positiven Ergebnisses? (6P)

(c) Das Testergebnis einer Person ist positiv. Mit welcher W! ist diese Person tatsächlich krank? (6P)

(d) Wie groß muss der Anteil p der kranken Personen mindestens sein, damit die W! in (c) größer als 0.9 wird? (4P)

---

2) Die diskrete Zufallsvariable X besitze die W-Funktion

$$p_k = P_X(X = k) = \frac{c\,k}{n(n+1)},\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (4P)

(b) Berechnen Sie $E(X)$. (4P)

(c) Zeigen Sie, dass $Var(X) = \frac{1}{18}(n-1)(n+2)$. (6P)

(d) Sei $n = 10$. Man berechne

$$P_X\left(|X - E(X)| \leq 2\sqrt{Var(X)}\right).$$

(6P)

---

3) Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2}\,e^{-1/x}, x > 0\,.$$

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (6P)

(b) Stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar. (6P)

(c) Wie lautet das p-te Quantil x_p, gegeben durch $p = F_X(x_p)$? Geben Sie die numerischen Werte für die Quantile $x_{0.25}, x_{0.5}$, und $x_{0.75}$ an. (8P)

---

4) Die Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ eines Zufallsvektors (X,Y) ist gegeben durch

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y},\ 0 < x < y < \infty\,.$$

(a) Man zeige, dass $f_{X,Y}(x,y)$ eine Dichte darstellt. (4P)

(b) Wie lauten die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$? (6P)

(c) Geben Sie $E(X), Var(X), E(Y), Var(Y)$ an (keine Rechnung notwendig). (6P)

(d) Sind X und Y unabhängig? (4P)

---

5) Sei $\{X_t | t \in \mathbb{R}\}$ ein stochastischer Prozeß mit

$$X_t = U \cdot \sin 2\pi t,$$

wobei U eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable ($U \sim U(0,1)$).

(a) Berechnen Sie $m_t = E(X_t)$. (4P)

(b) Wie lautet $E(X_t \cdot X_s)$? (6P)

(c) Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion
$K(s,t) = E(X_t \cdot X_s) - m_t \cdot m_s\,.$ (8P)

(d) Ist der Prozess stationär im weiteren Sinn? (2P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0,1,2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Man berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 0 | X_1 = 1, X_0 = 2) \quad \text{und} \quad P(X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 2)\,.$$

(6P)

(c) Bestimmen Sie die Grenzverteilung

$$\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2).$$

(10P)
