Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse

5. 2. 2007

1) Bei einem Casting für einen künstlerischen Wettbewerb werden 72 BewerberInnen getestet. Dabei werden die Ergebnisse des Castings mit den Ergebnissen eines Begabungstests verglichen. Man betrachtet dabei folgende Ereignisse.

B_1 = hochbegabt, B_2 = begabt, B_3 = mittelmäßig begabt,

C_1 = exzellentes Casting, C_2 = gutes Casting, C_3 = durchschnittliches Casting.

	C_1	C_2	C_3
B_1	9	5	3
B_2	14	20	4
B_3	2	5	10

Für eine(n) zufällig herausgegriffene(n) Bewerber(in) berechne man folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a) $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(C_2)$, (6P)

(b) $P(B_1|C_2)$, $P(C_2|B_2)$, (6P)

(c) $P(B_1 \cup B_2|C_1)$, $P(C_2|B_1 \cup B_3)$, $P(C_3|B_1 \cup B_3)$. (8P)

---

2) Bestimmen Sie die Konstanten a und b derart, dass gilt

$P_X(X \leq a) = 0.2$, $P_X(X \geq b) = 0.6$, falls

(a) X exponentialverteilt mit $\lambda = 1/4$, (8P)

(b) X $N(4, 2)$–verteilt, (8P)

(c) X gleichverteilt auf $[0, 8]$ ist? (4P)

---

3) Sei X eine stetige Zufallsvariable mit einer Verteilungsfunktion der Form

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ \frac{1}{2}(x+2)^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ c_1 + c_2\, x & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 \leq x < \infty\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2. (6P)

(b) Wie lautet die Dichte $f_X(x)$? (4P)

(c) Man stelle $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar. (4P)

(d) Man berechne $E(X)$. (6P)

---

4) Der diskrete Zufallsvektor (X,Y) besitze die folgende Verteilung:

$P(X=i,Y=j)$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$j=1$	1/12	1/4	1/6
$j=2$	1/6	1/6	0
$j=3$	1/12	0	?

(a) Bestimmen Sie $P(X=4, Y=3)$. (4P)

(b) Bestimmen Sie die Randwahrscheinlichkeiten von X und Y. (4P)

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X-Y)$. (6P)

(d) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(XY)$. (6P)

---

5) Wir nehmen an, dass die Zeiten zwischen den Landungen der Flugzeuge auf einem Flughafen unabhängig und exponential verteilt sind. Im Durchschnitt landet alle 30 Minuten ein Flugzeug. Sei N_t die Anzahl der landenden Flugzeuge im Intervall $[0,t]$. Dann ist $\{N_t, t \geq 0\}$ ein homogener POISSON-Prozess.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen innerhalb einer Viertelstunde mehr als 2 Flugzeuge? (4P)

(b) Das Bodenpersonal kann bis zu 2 Flugzeuge in 15 Minuten ohne Verzögerung entladen. In den letzten 10 Minuten sind 2 Flugzeuge gelandet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Landung des nächsten Flugzeugs Verzögerungen auslöst? (6P)

(c) Innerhalb von 30 Minuten sind 4 Flugzeuge gelandet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in den ersten 15 Minuten mehr als 2 Flugzeuge gelandet? (6P)

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet in den nächsten 20 Minuten kein Flugzeug? (4P)

---

6) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene MARKOV–Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0,1,2\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen und zeigen Sie, dass es sich um eine reguläre MARKOV–Kette handelt. (8P)

(b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung und die mittleren Rückkehrzeiten für jeden Zustand. (12P)
