Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse (506.010)

6. 2. 2006

---

1) Für die Fussballweltmeisterschaft 2006 in Deutschland werden Bälle aus Pakistan importiert. Eine Lieferung enthält 360 Bälle, wovon ein Anteil p fehlerhaft ist. Bei der Abnahme wird folgende Qualitätskontrolle durchgeführt:

Man entnimmt eine Stichprobe (mit Zurücklegen) von 12 Bällen. Sind alle Bälle in Ordnung (Ereignis A_0) wird die Lieferung angenommen. Sind zumindest zwei Bälle fehlerhaft (Ereignis A_2) wird die ganze Lieferung abgelehnt. Ist nur ein Ball fehlerhaft (Ereignis A_1), dann wird eine zweite Stichprobe (mit Zurücklegen) von 16 Bällen entnommen. Sind alle Bälle fehlerfrei, dann wird die Lieferung angenommen, ansonsten abgelehnt.

(a) Man zeichne den W–Baum. (6P)

(b) Man berechne $P(A_0)$, $P(A_1)$, $P(A_2)$. (4P)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung abgelehnt wird, wenn $p = 0.01$? (5P)

(d) Eine Sendung wird angenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert das nach der ersten Stichprobe? (5P)

---

2) Die Fahrgäste einer Stadtbahn (Länge a) steigen an einer zufälligen Stelle im Intervall $[0, a)$ zu. Die zufällige Einstiegstelle X besitze eine Dichte der Form

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x\,(a^2 - x^2) & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Konstante c. (6P)

(b) Stellen sie $f_X(x)$ für $a = 5$ graphisch dar. An welcher Stelle ist die Dichte maximal? (6P)

(c) Bestimmen Sie $E(X)$ und $P_X(X > 4)$ für $a = 5$. (8P)

---

3) Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her, deren Dicke untersucht werden soll. Es wird angenommen, dass die Dicke X normalverteilt ist mit $\mu = 20\,[\text{mm}]$ und $\sigma = 0.05\,[\text{mm}]$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Ausschuss, wenn die Dicke der Platten erster Qualität nur zwischen 19.95 [mm] und 20.10 [mm] liegen darf? (6P)

(b) Über welcher Stärke liegen 90 % der Platten? (6P)

(c) Bei der automatischen Zusammenstellung der Platten werden 4 % leicht beschädigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung von 20 Platten höchstens eine Platte beschädigt ist? (8P)

---

4) Ein Tetraeder mit den Augenzahlen 1,2,3,4 ist so verfälscht, dass die Augenzahlen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten auftreten:

k	1	2	3	4
$P_X(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Der Spieler verwendet den Tetraeder zusammen mit einem unverfälschten Tetraeder. Es bezeichne Y die Augenzahl des unverfälschten Tetraeders.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_S(S=i)$ der Augensumme $S = X + Y$. (12P)

(b) Wie lauten $E(X)$, $E(Y)$, $E(S)$? (8P)

---

5) Die Anzahl von Störungen N_t in $[0,t)$ in einem Unterseekabel sei ein homogener POISSON–Prozess mit Rate $\lambda = 1/20$ pro Kilometer.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt auf den ersten 5 Kilometern höchstens eine Störung auf? (4P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit, tritt in $[5, 7.5)$ eine, und in $[7.5, 10)$ keine Störung auf? (4P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung erst nach 60 Kilometern auf? (6P)

(d) Auf einer Länge von 100 Kilometern treten 6 Störungen auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es auf den ersten 10 Kilometern 2 Störungen? (6P)

---

6) Sei $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$, eine homogene MARKOV–Kette mit Zustandsraum $Z = \{0, 1, 2\}$. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen und zeigen Sie, dass es sich um eine reguläre MARKOV-Kette handelt. (6P)

(b) Bei gegebener Anfangsverteilung $\mathbf{p}^{(0)} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ berechne man $\mathbf{p}^{(1)}$ und $P(X_1 = 2)$. (6P)

(c) Wie lautet die Grenzverteilung $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2)$? (8P)
