Prüfung aus
Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse
07. 02. 2005

---

1) Man nehme an, dass ein Kalenderjahr aus $n = 26$ Perioden zu je 14 Tagen (= 364 Tage) bestehe. Es seien 8 Personen anwesend.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 8 Personen mindestens eine Person in einer *bestimmten* Periode Geburtstag hat? (4P)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei der 8 Personen in *der selben* Periode Geburtstag? (4P)

(c) Ab wieviel anwesenden Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter ihnen mindestens eine Person mit Geburt in Periode 5 dabei ist, größer als $\frac{3}{4}$? (6P)

(d) Ab wievielen Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle in verschiedenen Perioden geboren sind, kleiner als $\frac{1}{2}$? (6P)

---

2) Eine entschlossene Minderheit kann bei einer uninteressierten Mehrheit einen unverhältnismäßig großen Einfluss ausüben:

(a) Der Senat der TU Graz hat 24 Mitglieder. Sechs dieser 24 Mitglieder sind Studenten und wollen gemeinsam mit den 3 Assistenten einen Antrag durchbringen. Die übrigen 15 Mitglieder stimmen zufällig ab (z.B. durch Werfen einer Münze). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Vorschlag angenommen wird? (6P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die in (a) genannten 9 Senatsmitglieder durchsetzen, wenn für die Annahme des Antrags eine Zweidrittelmehrheit erforderlich ist. (Es wird wieder angenommen, dass alle übrigen Senatsmitglieder indifferent bleiben.) (8P)

(c) Die Stadt Graz hat 156.000 Wahlberechtigte. In einer wichtigen Frage wird eine Volksabstimmung durchgeführt. 500 Wahlberechtigte sind entschlossen mit *JA* zu stimmen; alle anderen treffen eine Zufallsentscheidung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mit einer Mehrheit der *JA* Stimmen zu rechnen? (*Approximieren Sie die zu berechnende Wahrscheinlichkeit durch die Normalverteilung.*) (6P)

---

3) Die diskrete Zufallsvariable Y sei *modifiziert geometrisch* verteilt mit W–Funktion $P_Y(Y = k) = pq^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $q = 1 - p$.

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit gilt:
$P(Y > n + m | Y > m) = P_Y(Y > n)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. (10P)

(b) Bestimmen Sie die Erzeugende Funktion $G_Y(s)$ der Zufallsvariablen Y. (6P)

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$ mit Hilfe von (b). (4P)

---

4) Die Zugfestigkeit X von Kunststofffäden sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 40$ kg und Standardabweichung $\sigma = 4$ kg.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgezogener Faden eine Zugfestigkeit zwischen 36 und 42 kg aufweist? (4P)

(b) Welche mittlere Zugfestigkeit μ müssen die Fäden mit $\sigma = 4$ kg haben, damit $P_X(X > 38) = 0.99$? (6P)

(c) Es werden 50 Kunststofffäden produziert. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $\overline{X} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i$ (mittlere Zugfestigkeit)? (4P)

(d) Für welches a ist $P_{\overline{X}}(|\overline{X} - E(\overline{X})| < a) = 0.95$? (6P)

---

5) In einem Computernetzwerk treten Störungen gemäss einem homogenen POISSON–Prozess N_t mit Rate $\lambda = \frac{1}{4}$ pro Tag auf.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt an zwei Tagen höchstens eine Störung auf? (4P)

(b) In einem Zeitraum von 6 Tagen treten 4 Störungen auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es innerhalb der ersten beiden Tage eine Störung? (6P)

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die 2. Störung erst nach 4 Tagen auf? (6P)

(d) Es sei an zwei Tagen (Intervall (0,2]) keine Störung aufgetreten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die erste Störung am 3. oder 4. Tag auf (Intervall (2,4])? (4P)

---

6) Eine homogene MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Berechnen Sie die zweistufige Übergangsmatrix $\mathbf{P}^2$. (4P)

(c) Wie lauten $P(X_4 = 2 | X_2 = 1)$, $P(X_4 = 1 | X_2 = 0)$? (6P)

(d) Mit Anfangsverteilung $\mathbf{p}^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ bestimme man $P(X_1 = 2)$. (6P)
