Prüfung aus

Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse Telematik

02. 02. 2004

---

1) Studenten können zu einer bestimmten Prüfung maximal dreimal antreten. Die Wahrscheinlichkeit p_k, daß ein zufällig ausgewählter Student beim k-ten Antreten durchkommt, gegeben daß $k-1$ Fehlversuche vorliegen ($k = 1, 2, 3$) sei:
$p_1 = \frac{5}{6}$, $p_2 = \frac{9}{10}$, $p_3 = \frac{4}{5}$

(a) Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum. (4P)

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat die Prüfung erfolgreich absolviert. (6P)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat durchkommt, unter Annahme, dass er beim zweiten Versuch scheitert. (4P)

(d) Der Kandidat ist durchgekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dies bereits beim ersten Versuch? (6P)

---

2) An einer Straßenecke wird folgendes Spiel mit 2 Tetraedern (2 vierseitige Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 4) angeboten.
Zeigen beide Tetraeder dieselbe Augenzahl, dann gewinnt man das Vierfache des Einsatzes e. Unterscheiden sich die Augenzahlen um $i, i = 1, 2, 3$, dann verliert man den i-fachen Einsatz.

(a) Geben Sie einen geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ für das Werfen der beiden Tetraeder an. (4P)

(b) Geben Sie die W-Funktion der Zufallsvariablen $D =$ *absolute Differenz der Augenzahlen* an. (8P)

(c) Geben Sie den Gewinn G (negativer Gewinn = Verlust) als Funktion von D und dem Einsatz e an und berechnen Sie $E(G)$.
Ist das Spiel fair? (8P)

---

3) Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \le x < 1 \\ c/x^2 & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c. (4P)

(b) Wie lautet die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (5P)

(c) Stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar. (5P)

(d) Berechnen Sie E(X) und $P_X(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2})$. (6P)

---

4) Für einen zweidimensionalen Zufallsvektor (X, Y) sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

X/Y	0	1	2	$P_X(X = i)$
0	1/6	1/12		1/3
1		0	1/6	
2	1/6			
$P_Y(Y = j)$	1/2		1/3	

(a) Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle. (8P)

(b) Berechnen Sie $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$. (8P)

(c) Wie lautet $\rho(X, Y)$? (4P)

---

5) Sei $\{N_t|\, t \geq 0\}$ ein homogener POISSON-Prozess mit Intensität λ.

(a) Berechnen Sie $E(N_t \cdot N_{t+s})$ und $K(t, t+s) = Cov(N_t, N_{t+s}); t, s \geq 0$. (10P)

(b) Geben Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(N_t = k|N_{t+s} = n)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ an. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable N_t unter der Bedingung $N_{t+s} = n$? (10P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n|n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen. (4P)

(b) Ausgehend von Zustand 1 berechne man die Absorptions - wahrscheinlichkeiten in die Zustände 0 und 2. (8P)

(c) Wie groß ist die erwartete Anzahl von Schritten m_1 bis zur Absorption? (4P)

(d) Bei gegebener Anfangsverteilung $\mathbf{p}^{(0)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ berechne man die Verteilung $\mathbf{p}^{(1)}$ zum Zeitpunkt 1. (4P)
