1) In einem automatischen Zugangssystem werden die Fingerabdrücke von Personen überprüft. 95% der Personen sind registriert und haben eine Zugangsberechtigung. Der Fingerabdruck der registrierten Personen wird *beim ersten Mal* in 98% der Fälle akzeptiert, und von den nicht registrierten Personen werden fälschlicherweise 3% akzeptiert. Jene Personen, die *beim ersten Mal* nicht akzeptiert wurden, haben einen *zweiten Versuch.* Dabei werden 99% der registrierten Personen akzeptiert und 2% der nicht registrierten.

(a) Zeichnen Sie den zugehörigen W–Baum. (6P)

(b) Wie groß ist die W!, dass eine Person richtig eingeordnet wird? (6P)

(c) Eine Person wurde abgewiesen. Mit welcher W! ist diese registriert? (8P)

2) Ein Sprachstudent mit vielen anderen Interessen bereitet sich auf einen Vokabeltest vor und entschließt sich zu folgender Strategie: 60% *aller Vokabel zu lernen genügt sicher für eine positive Beurteilung.* Der Professor fragt zwölf willkürlich herausgegriffene Vokabel ab. Sei $X = \sharp$(richtige Vokabel).

(a) Geben Sie die W-Funktion $P_X(X = k)$, $E(X)$ und $Var(X)$ an. (6P)

(b) Wie groß ist $P_X(X \leq 5)$, also die Wahrscheinlichkeit einer negativen Beurteilung? (Approximation genügt). (4P)

(c) Wie groß ist $P_X(6 \leq X \leq 9)$, also die Wahrscheinlichkeit einer genügenden bis befriedigenden Beurteilung? (4P)

(d) Angenommen er lernt 90% der Vokabel, gilt dann $P_X(X \geq 10) \geq 0.85$? (6P)

3) Die stetige Zufallsvariable X besitze die Dichtefunktion $f_X(x)$ der Form

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{2a}\, e^{-(x-a)/a} & x > a. \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass $f_X(x)$ eine Dichtefunktion definiert. (6P)

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (4P)

(c) Stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ für $a = 1$ graphisch dar. (4P)

(d) Berechnen Sie $P_X\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{2}\right)$ für $a = 1$. (6P)

---

4) Ein zweidimensionaler diskreter Zufallsvektor (X, Y) besitzt folgende W-Funktion $P_{X,Y}(X = i, Y = j)$:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

(a) Bestimmen Sie $P_X(X = i), P(Y = j)$. (4P)

(b) Man berechne $E(X), E(Y)$ und $\rho(X, Y)$. (8P)

(c) Sei $Z = X + Y$. Geben Sie die W-funktion $P_Z(Z = k)$ von Z an. (8P)

5) Die Anzahl von Störungen N_t in $[0, t)$ in einem Unterseekabel sei ein homogener POISSON-Prozess mit Rate $\lambda = \frac{1}{10}$ pro km.

(a) Mit welcher W! tritt im Intervall $[0, 4)$ höchstens eine Störung auf? (4P)

(b) Mit welcher W! tritt in $[4, 6)$ keine, und in $[6, 12)$ eine Störung auf? (6P)

(c) Es sei in $[0, 2)$ keine Störung aufgetreten. Mit welcher W! tritt dann in $[2, 3)$ auch keine Störung auf? (4P)

(d) Mit welcher W! tritt die zweite Störung erst nach 6 km auf? (6P)

---

6) Eine MARKOV–Kette $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}$ habe folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen. (4P)

(b) Man berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 2 | X_1 = 0, X_0 = 1) \quad \text{und} \quad P(X_2 = 2, X_1 = 0 | X_0 = 1)\,.$$

(6P)

(c) Man berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 2, X_1 = 0 | X_0 = 0),\; P(X_{n+1} = 2, X_n = 0 | X_{n-1} = 0),\; n > 1\,.$$

Unter Vorliegen der Anfangsverteilung

$$P(X_0 = 0) = \tfrac{2}{5},\; P(X_0 = 1) = \tfrac{3}{10},\; P(X_0 = 2) = \tfrac{3}{10},$$

berechne man $P(X_1 = 2)$ und $P(X_1 = 2, X_2 = 1)$. (10P)
