AUSTRIAN JOURNAL OF STATISTICS
Volume 34 (2005), Number 4, 411–419

Hypergruppen in Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie

Ein Tribut an den Meister

Herbert Heyer
Tübingen, Deutschland

Anläßlich des Kolloquiums zum Gedenken an Professor Dr. Leopold Schmetterer in der Österreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien am 4. April 2005 gehaltener Vortrag

„Verachtet mir die Meister nicht!"

Dieser Aufruf des Hans Sachs in Wagners Oper möge die Ausführungen einleiten, die der Schüler in Verehrung seines Lehrers Ihnen, meine sehr verehrten Damen und Herren, den Nächsten, den Kollegen und den Weggefährten von Leopold Schmetterer, zugedacht hat.

In einer Zeit, da Bildung und Lehre in aller Munde heiß und umstritten diskutiert werden, man keine noch so skrupulöse Evaluation der Leistungen von Lehrern und Schülern scheut, um im Wettbewerb anonymer Institutionen zu obsiegen, gerät eine Beziehung, aus der unser Wissen Jahrhunderte lang gespeist wurde, leicht in Vergessenheit: Das Verhältnis zwischen Meister und Schüler. Diese nicht selten als anachronistisch empfundene Beziehung war doch der Ausgangspunkt aller bedeutenden Errungenschaften in allen Bereichen kreativen Tuns. Man kann mit bedeutenden geistigen Gespannen aufwarten: Sokrates - Platon, Tycho Brahe - Kepler, Edmund Husserl - Martin Heidegger, um nur drei Beispiele zu nennen. Natürlich zeigen die einschlägigen Biographien auch spannungsreiche, oft problematische Verhältnisse zwischen Meister und Schüler. Aber es gibt markante Konstanten, die derartige Partnerschaften wertvoll erscheinen lassen: das leidenschaftliche Streben nach Wahrheit und das für dies gemeinsame Unternehmen unerlässliche Vertrauen zueinander.

Die Meister-Schüler-Beziehung gründet auf dem schon von Schiller so bezeichneten „pädagogischen Eros". In den großen Bildungsromanen vom Parzival über Goethes „Wilhelm Meister", Mörikes „Maler Nolten" bis hin zu Thomas Manns „Doktor Faustus" liest man von Meisterschaft und Jüngerschaft.

Hermann Hesses „pädagogische Provinz" hat ihre Wurzeln im Staate Platons, im Tao und im Konfuzianismus, im mittelalterlichen Mönchtum und in den Akademien der italienischen Renaissance.

Noch heute ist die Meister-Schüler-Beziehung eine unverzichtbare Begleiterscheinung des Zusammenspiels der Generationen. Sie gehört zu jeder Form von Ausbildung und Weitergabe von Wissen. Sie schafft den Anreiz zu produktiver Kontinuität, garantiert die Fortentwicklung des Erreichten. Im kürzlich in deutscher Übersetzung erschienen Buch des Universalgelehrten George Steiner mit dem Titel „Lessons of the Masters" steht die These

> „Meister bewahren und verstärken die Erinnerung. Jünger erweitern, verbreiten die Hauptstütze der Identität."

Den maître de pensée zu verehren, gar ihm nachzufolgen, darf nicht als eine die eigene Kreativität schmälernde Unterordnung verstanden werden. In einer guten Meister-Schüler-Beziehung gibt der Meister die Richtung vor und zieht sich zurück, sobald das selbstständige Arbeiten des Schülers gesichert ist. Eine solche Beziehung kann, namentlich in den Naturwissenschaften und in der Mathematik, zur Zusammenarbeit von äquipotenten Geistern führen. Dann stellt sich gegenseitige Wertschätzung ein, ohne dass der Vorrang des Meisters vor dem Schüler gefährdet ist.

Meine sehr verehrten Damen und Herren. War es ein zu hoch gegriffener Rahmen, in den ich den dahin geschiedenen Meister und seine ihn überlebenden Schüler eingebettet habe?

An der Ideengeschichte orientiert ist jede, aber auch jede Meister-Schüler-Beziehung ein wertvolles Kulturgut, das Anerkennung und Respekt vor dem Werk des Meisters auslöst.

Mein Ziel im weiteren Verlauf des Vortrages wird sein, diejenige Meisterschaft Leopold Schmetterers erkennbar werden zu lassen, welche zu Fundierung und Ausbau der strukturellen Wahrscheinlichkeitstheorie geführt hat, einem Teilgebiet der modernen Stochastik, das in neuester Zeit von der Grundstruktur einer Hypergruppe geprägt worden ist.

1 Von der Gruppe zur Hypergruppe

Es seien eine lokalkompakte Gruppe G und eine kompakte Untergruppe H von G mit normiertem Haar-Maß ω_H gegeben. Wir betrachten den mit der Quotiententopologie ausgestatteten lokalkompakten Raum

$$K := G//H := \{HxH : x \in G\}$$

der H-Doppelnebenklassen von G. Dieser trägt im allgemeinen weder eine Gruppen- noch Halbgruppenstruktur. Trotzdem kann man im Raum $M^b(K)$ der beschränkten Radon-Masse auf K eine Faltung einführen. Sie wird für Dirac-Maße durch

$$\varepsilon_{HxH} * \varepsilon_{HyH} := \int_H \varepsilon_{HxhyH}\omega_H(dh)\,,$$

sofern $HxH, HyH \in K$, und nach Fortsetzung für alle Maße in $M^b(K)$ definiert. K wird damit zu einer lokalkompakten Hypergruppe $(K, *)$ im Sinne der Definition der Autoren C.F. Dunkl, R.J. Jewett und R. Spector, die unabhängig voneinander um das Jahr 1975 die im Folgenden nur fragmentarisch beschriebene Axiomatik vorschlugen.

Definition *Hypergruppe* heißt jeder lokalkompakte Raum K, welcher mit einer Faltung genannten Abbildung

$$(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$$

von $M^b(K) \times M^b(K)$ in $M^b(K)$ so ausgerüstet ist, dass u.a. folgende Axiome gelten:

- Die Faltung ist stetig bzgl. der schwachen Topologie in $M^b(K)$.

- $M^b(K)$ wird zusammen mit der Faltung und der Normtopologie eine Banach-Algebra, welche eine Involution $\mu \mapsto \mu^-$ und ein neutrales Element ε_e (für ein ausgezeichnetes $e \in K$) besitzt.

- Für $x, y \in K$ ist $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf K mit kompaktem Träger.

- Die Abbildung
$$(x, y) \mapsto \text{supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$$
von $K \times K$ in den mit der Michael-Topologie versehenen Raum der kompakten Teilmengen von K ist stetig.

Als triviales **Beispiel** einer Hypergruppe erwähnen wir eine Gruppe K, für die

$$\varepsilon_x * \varepsilon_y = \varepsilon_{xy}$$

gilt, die Faltung $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ für $x, y \in K$ also einen einpunktigen Träger besitzt.

Bemerkung Gegenüber der deterministischen Produktbildung im Gruppenfall kann man die Hypergruppenoperation stochastisch interpretieren, da Elemente in K sozusagen mittels eines Wahrscheinlichkeitsmaßes verknüpft werden.

Als Einübung in die Methode merken wir an, dass Eigenschaften einer Hypergruppe K stets in der Sprache der Maße zu formulieren sind. Zum Beispiel heißt K *kommutativ* falls
$$\varepsilon_x * \varepsilon_y = \varepsilon_y * \varepsilon_x$$
gilt für alle $x, y \in K$.

Allgemeines Beispiel Es seien G ein lokalkompakte Gruppe und H eine kompakte Untergruppe, so dass ein Gelfand-Paar (G, H) vorliegt, d.h. dass die Unteralgebra der H-invarianten Maße in $M^b(G)$ kommutativ ist. Dann ist der Raum $G//H$ stets eine kommutative Hypergruppe.

Unterbeispiele, die ein Klassifikationsschema für kommutative Hypergruppen suggerieren

(a) (Nichtkompakter Typ) Für $G := \mathbb{M}(d)$ (die Bewegungsgruppe des $\mathbb{R}^d$) und $H := SO(d)$ $(d \geq 1)$ erhält man $G/H \cong \mathbb{R}^d$ und $G//H \cong \mathbb{R}_+ \cdot \mathbb{R}_+$ trägt die von der Gruppenfaltung in $\mathbb{M}(d)$ induzierte *Bessel-Kingman-Faltung*.

(b) (Kompakter Typ) seien $G := SO(d+1)$ und $H := SO(d)$ $(d \geq 1)$. Dann ist $G/H \cong \mathbb{S}^d$ und $G//H \cong [-1, 1]$. Es trägt $[-1, 1]$ die *Gegenbauer-Faltung*.

(c) (Diskreter Typ) Falls $G := Aut(\Gamma)$ für einen Graphen Γ und $H := H_{t_0}$ der Stabilisator des Knotens $t_0 \in \Gamma$ unter der Aktion von G auf Γ, ergibt sich $G/H \cong \Gamma$, der Graph Γ ist also als homogener Raum darstellbar, und $\mathbb{Z}_+$ als Doppelklassen-Hypergruppe trägt die *Cartier-Faltung*.

Das Unterbeispiel (c) wird in Abschnitt 4 genauer ausgeführt werden.

2 Zur Analysis kommutativer Hypergruppen

Zu diesem Thema stellen wir nur ausgewählte Grundzüge bereit; Interessierte mögen sich in der mit W.R. Bloom im Jahre 1995 publizierten Monographie des Autors mit dem Titel „Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups“ präziser orientieren. Es sei K weiterhin eine kommutative Hypergruppe

2.1 Die *verallgemeinerte Translation* von $x \in K$ wird als Operator T^x auf zulässigen Funktionen f auf K durch

$$T^x f(y) := \int_K f d(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$$

für alle $y \in K$ definiert.

Damit ist die Formulierung des nachstehenden auf R. Spector (1978) zurückgehenden Resultates gerechtfertigt.

2.2 Es existiert ein eindeutiges (translationsinvariantes) *Haar-Maß* ω_K auf K.

2.3 *Charaktere* von K sind stetige hermitesche Homomorphismen χ von K in die Einheitskreisscheibe, wobei die Homomorphie von χ durch

$$\chi(x)\chi(y) = T^x\chi(y)$$

für alle $x, y \in K$ ausgedrückt wird.

2.4 Im *Dual* $K^\wedge$ von K werden alle Charaktere $\neq 0$ von K zusammengefasst. $K^\wedge$ ist ein lokalkompakter Raum bzgl. der kompakt-offenen Topologie.

Bemerkung $K^\wedge$ ist i.a. keine Hypergruppe, so dass man nur in Spezialfällen (wie etwa im Unterbeispiel (a)) mit der Gültigkeit des im Gruppenfall vorliegenden Satzes von Pontrjagin rechnen kann.

Dennoch steht für kommutative Hypergruppen K

2.5 eine *Fourier-Stieltjes-Transformation* zur Verfügung; sie wird als Abbildung

$$\mu \mapsto \widehat{\mu}$$

von $M^b(K)$ in dem Raum $C^b(K^\wedge)$ der beschränkten stetigen Funktionen auf dem Dual $K^\wedge$ von K durch

$$\widehat{\mu}(\chi) := \int_K \overline{\chi} d\mu$$

für alle $\chi \in K^\wedge$ definiert und erweist sich als injektiv (Eindeutigkeitssatz) und sequentiell stetig (P. Lévys Stetigkeitssatz).

2.6 Die Abbildung

$$f \mapsto \widehat{f}$$

liefert nach Levitan (1945) einen isometrischen Isomorphismus

$$L^2(K, \omega_K) \hookrightarrow L^2(K^\wedge, \pi_K),$$

wobei π_K das zu ω_K gehörige nichtnegative *Plancherel- Maß* auf $K^\wedge$ bezeichnet.

Bemerkung Da π_K im allgemeinen nicht voll ist, ergeben sich im Falle von Hypergruppen gegenüber dem Gruppenfall weitreichende analytische Probleme.

3 Konstruktion verallgemeinerter Faltungen

3.1 Bessel-Kingman-Faltung
Es seien $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ zwei stochastisch unabhängige, *rotationsinvariante* Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$. Dann ist auch $\underline{X} + \underline{Y}$ rotationsinvariant, und

$$\mid \underline{X} + \underline{Y} \mid = \left(\mid \underline{X} \mid^2 + \mid \underline{Y} \mid^2 + 2 \mid \underline{X} \mid\mid \underline{Y} \mid \cos \Lambda\right)^{1/2}$$

lässt die euklidische Kosinustransformation erkennen. Hierbei ist der Winkel Λ zwischen $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ unabhängig von den nichtnegativen Zufallsvariablen $X := |\underline{X}|$ und $Y :=\mid \underline{Y} \mid$. Für die Verteilung von $\mid \underline{X} + \underline{Y} \mid$ berechnet man

$$\int_{\mathbb{R}_+} f d\mathbb{P}_{|\underline{X}+\underline{Y}|} = c_d \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{[0,2\pi]} f\left((x^2+y^2+2xy\cos\vartheta)^{1/2}\right) \sin^{d-2} d\vartheta \mathbb{P}_X(dx)\mathbb{P}_Y(dy)$$

und nutzt das Integral zur Definition von $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y(f)$. Damit ist in $\mathbb{R}_+$ eine Faltung erklärt, welche $\mathbb{R}_+$ zur Hypergruppe des Unterbeispiels (a) macht.

Bemerkung Die Integraldefinition der Bessel-Kingman Faltung kann ohne Schwierigkeit auf reelle „Dimensionen" anstelle von $d \geq 1$ verallgemeinert werden. Die dadurch gestifteten Faltungen in $M^b(\mathbb{R}_+)$ rühren dann nicht mehr von Gelfand-Paaren her.

Die Konstruktion der Bessel-Faltung ist in einer allgemeineren Konstruktion von Faltungen über $\mathbb{R}_+$ enthalten.

3.2 Sturm-Liouville Faltungen
in $M^b(\mathbb{R}_+)$ werden mittels nichtnegativer „Linearisierung" der Charakter φ_λ in $\mathbb{R}_+^\wedge$ eingeführt. Man hat die für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gültige Formel

$$\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_\lambda(z)\mu_{x,y}(dz)\,,$$

wobei das Maß $\mu_{x,y} \geq 0$ auf $\mathbb{R}_+$ die Definition von $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ liefert.

Spezialfall
$\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{M}(d)/\!/SO(d)$ (Konstruktion 3.1 und Unterbeispiel (a))

3.3 Polynom-Faltungen
in $M^b(\mathbb{Z}_+)$. Als Charaktere von $\mathbb{Z}_+$ fungieren orthogonale Polynome Q_n, welche eine nichtnegative Linearisierung der Form

$$Q_n Q_m = \sum_{k \geq 0} Q_k g(n, m, k)$$

gestatten, wobei die Koeffizienten $g(n, m, k) \geq 0$ zur Definition von $\varepsilon_n * \varepsilon_m(\{k\})$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}_+$ dienen.

Spezialfälle
(b') dual zu (b) $\mathbb{Z}_+ \cong (SO(d+1)/\!/SO(d))^\wedge$.
$(c)\mathbb{Z}_+ \cong G/\!/H$ für $G := Aut(\Gamma)$, $H := H_{t_0}$.

4 Graphen und Hypergruppen

Wir detaillieren die Theorie des Unterbeispiels (c).

Es sei Γ ein lokalendlicher unendlicher Graph. Es werde vorausgesetzt, dass

(A) die Gruppe $G := Aut(\Gamma)$ der Automorphismen von Γ transitiv auf Γ operiert.

Dann ist G bzgl. der Produkttopologie in Γ^Γ eine total unzusammenhängende lokalkompakte Gruppe, welche den Stabilisator $H := H_{t_0}$ eines Knotens $t_0 \in \Gamma$ als kompakte offene Untergruppe besitzt. Die Abbildung

$$gh \mapsto g(t_0)$$

von G/H in Γ ist ein Homöomorphismus, und die Menge $K := G//H$ der Bahnen unter H auf Γ wird zu einer diskreten Hypergruppe mit der durch

$$\varepsilon_{HxH} * \varepsilon_{HyH}(\{HzH\}) = \frac{\mid H(zH) \cap x(H(yH)) \mid}{\mid H(yH) \mid}$$

für alle $x, y, z \in G$ definierten Faltung.

Darüberhinaus werde vorausgesetzt, dass

(B) der Graph Γ *distanz-transitiv*, d.h. dass für die minimale Länge $d(s,t)$ zwischen zwei Knoten $s, t \in \Gamma$ die folgende Eigenschaft erfüllt ist: Zu $s, t, u, v \in \Gamma$ mit $d(s,t) = d(u,v)$ gibt es ein $g \in G$, so dass $g(s) = u$ und $g(t) = v$ gilt.

In diesem Fall operiert H für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ transitiv auf den Mengen

$$\{t \in \Gamma : d(t, t_0) = n\}\,.$$

Somit sind $K := G//H$ und $\mathbb{Z}_+$ identifiziert, und die Faltung in $M^b(\mathbb{Z}_+)$ wird von der Faltung in $M^b(K)$ induziert.

Für $n, m \in \mathbb{Z}_+$ gilt daher

$$\varepsilon_n * \varepsilon_m = \sum_k \varepsilon_k g(n,m,k)$$

mit $g(n,m,k) \geq 0$ ($k \in \mathbb{Z}_+$). Genauer ist $(\mathbb{Z}_+, *)$ eine Hypergruppe mit der Identität als Involution und 0 als neutralem Element.

Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 > 0$, kann man nun eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ orthogonder Polynome definieren, indem man

$$\begin{aligned} Q_0 &\equiv 1\,, \\ Q_1(x) &= c_1 x + c_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \\ Q_1 Q_n &= g(1,n,n+1)Q_{n+1} + g(1,n,n,)Q_n + g(1,n,n-1)Q_{n-1} \end{aligned}$$

setzt, so dass die nichtnegative Linearisierung

$$Q_n Q_m = \sum_{k\geq 0} Q_k g(n, mk)$$

vorliegt ($n, m \in \mathbb{Z}_+$). Die Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ wird nach P. Cartier benannt.

Schließlich wendet man einen Satz von McPherson (1982) an, der impliziert, dass Γ ein Standardgraph $\Gamma^{a,b}$ ist, d.h. dass an jedem Knoten von $\Gamma^{a,b}$ genau a Kopien eines vollständigen Graphen mit jeweils b Knoten hängen ($a, b > 1$). In suggestiver Schreibweise symbolisiert $(K, *(Q_n^{a,b}))$ die bereits im Unterbeispiel (c) angekündigte *Cartier-Hypergruppe*.

Unterbeispiel Für $q := a - 1$, $b = 2$, ergeben sich der homogene Baum Γ^q und die zugehörige Hypergruppe $(K, *(Q_n^q))$ der Ordnung $q > 1$. Probleme der harmonischen Analyse und der Wahrscheinlichkeitstheorie für diese Struktur wurden z.B. von P. Cartier, und J.P. Arnaud (1994) erfolgreich studiert.

5 Irrfahrten in Hypergruppen

Es soll der Zugang zu einem Grenzwertsatz für Irrfahrten in einer Cartier-Hypergruppe beschrieben werden.

Zunächst sei $(K, *)$ eine beliebige kommutative Hypergruppe.

Definition
Eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ K-wertiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt (stationäre, homogene) *Markoff-Kette* in K, falls ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf K existiert, so dass die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt gestaltet sind:

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \in A \mid S_n = l) = \nu * \varepsilon_l(A)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, alle Borelschen Mengen A von K und alle $l \in K$.

Falls $S_0 = e$, so gilt

$$\mathbb{P}_{S_n} = \nu^n$$

wennimmer $n \in \mathbb{Z}_+$.

In der nachstehenden **Anwendung** wird sichtbar, wie Irrfahrten in einem homogenen Raum in Markoff-Ketten auf der zugehörigen Doppelklassen-Hypergruppe übergeführt werden können.

Es sei $(T_n)_n \in \mathbb{Z}_+$ eine Irrfahrt im Graphen $\Gamma := \Gamma^{a,b}$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

- $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ist homogen in Raum und Zeit, d.h.

$$\mathbb{P}(T_{n+h+1} = g(s) \mid T_{n+h} = g(t)) = \mathbb{P}(T_{n+1} = s \mid T_n = t)$$

  für alle $n, h \in \mathbb{Z}_+, s, t, \in \Gamma$.

- $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ist einfach mit deterministischem Start in $t_0 \in \Gamma$, d.h.

$$\mathbb{P}(d(T_{n+1}, T_n) > 1) = \mathbb{P}(d(T_{n+1}, T_n) = 0) = 0$$

  für alle $n \in \mathbb{Z}_+$.

Dann liefert der Ansatz

$$S_n = d(t_0, T_n)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}_+$ eine Markoff-Kette in der Cartier-Hypergruppe $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n^{a,b}))$ mit definierendem Wahrscheinlichkeitsmaß ε_1 (unabhängig von t_0). Die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten können in Abhängigkeit von a, b explizit angegeben werden.

Zur Theorie lokaler Grenzwertsätze für diskrete Hypergruppen haben seit 1978 u.a. S. Sawyer, T. Steger, M.A. Picardello und M. Voit beigetragen.

Ein typischer Grenzwertsatz (M. Lindlbauer 1998)
Es seien $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n^{a,b}))$ die Cartier-Hypergruppe mit $a \geq 2, b \geq 2, \nu \neq \varepsilon_0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Z}_+$, für welches die Momente

$$\sigma := \widehat{\nu}(\cos o)$$

und

$$\kappa := \frac{d^2}{dt^2}\widehat{\nu}(\cos t)\ |_{t=0}$$

existieren. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{1}{\sigma^n} n^{3/2} \nu^n(\{k\}) \to C(\sigma, \kappa)\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{k\})Q_k^{a,b}(1)\,,$$

falls $n \to \infty$.

Bemerkung Abgesehen von den Konstanten erinnert man sich angesichts dieses Resultats des klassischen Analogons

$$\sigma\sqrt{2\pi}\, n^{1/2}\, \mathbb{P}(\alpha \leq S_n \leq \beta) \to \beta - \alpha$$

für $n \to \infty$.

Im **Beweis** des Grenzwertsatzes greift man auf die Fourier-Stieltjes-Transformation für die Cartier-Hypergruppe zurück. Man bedient sich der in diesem Rahmen gültigen *Inversionsformel*

$$\nu^n(\{k\}) = \omega_{\mathbb{Z}_+}(\{k\}) \int_{\mathbb{Z}_+^\wedge} \widehat{\nu}(x)^n Q_k^{a,b}(x)\pi_{\mathbb{Z}_+}(dx)$$

$(n, k \in \mathbb{Z}_+)$ sowie der *Taylor-Entwicklung*

$$\frac{1}{\sigma}\widehat{\nu}(\cos t) = 1 + \frac{\kappa}{2\sigma}t^2 + O(t^4)\,,$$

($t \in [0, \varepsilon]$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$).

Soweit meine mathematische Mitteilung über eine Thematik, die dem Meister vertraut war und deren Entwicklung er mitgestaltet hat. Über seine gewichtigen Beiträge im einzelnen zu reden, ist am heutigen Nachmittag nicht vorgesehen. Diese Aufgabe durfte ich anlässlich seines 70. Geburtstages hier in Wien in seiner Gegenwart wahrnehmen. Von den Impulsen des Meisters längs meines eigenen wissenschaftlichen Weges seien nur einige aufgeführt: Dass er den Mathematikstudenten des 5. Semesters nur zögerlich in sein

Hamburger Seminar aufnahm, da es dem Anfänger noch an maßtheoretischen Grundkenntnissen fehlte, dass er Vertrauen in ihn setzte, als er ihn als Fulbright Stipendiat an das von Jerzy Neyman geleitete Department of Statistics in Berkeley vermittelte, dass er ihn beim Weggang von Hamburg zurück nach Wien seinem Nachfolger Heinz Bauer nicht ganz ohne Bedenken überließ, da er ihm bereits ein Dissertationsthema schmackhaft gemacht hatte, dass er ihn später als Kollegen annahm, dessen mathematische Bemühungen er in der ihm eigenen verhaltenen Art nicht gering schätzte.

Die hier subjektiv beschriebene Meister-Schüler-Beziehung war eine gelungene. Trotz oder gerade wegen der mit Strenge forcierten hohen Anforderungen an seine Schüler wurde Leopold Schmetterer zum Vorbild eines magister, maître, Meisters, den der Schüler nicht aufhört zu verehren.

> „Die charismatische Aura des inspirierten Lehrers, der Zauber der Person im pädagogischen Akt wird sicherlich überdauern“

verspricht George Steiner, und er warnt an anderer Stelle

> „Die Gesellschaft, die ihre Lehrer nicht ehrt, ist fehlerhaft.“

Und so schließe ich im Gedenken an Leopold Schmetterer mit zwei Zeilen aus einem Gedicht von Robert Browning

> „Der Meister, welcher ruhmreich, still und tot
> ist’s, den wir tragen.“

Literatur

Bloom, W. R., and Heyer, H. (1995). Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. *De Gruyter Studies in Mathematics*, *20*.

Heyer, H. (1989). Das Einbettungsproblem der Wahrscheinlichkeitstheorie – Leopold Schmetterers Beiträge zur strukturellen Wahrscheinlichkeitstheorie und neuere Entwicklungen. *19*, 191-213.

Lindlbauer, M. (1998). *Grenzwertsätze für Irrfahrten auf Dreiecksgebäuden und den dazu assoziierten polynomiellen Hypergruppen*. Unpublished doctoral dissertation, Mathematische Fakultät der Universität Tübingen.

Steiner, G. (2003). *Lessons of the Masters, The Charles Eliot Norton Lectures, 2001–2002*. London: Harvard University Press.

Adresse des Autors:

Herbert Heyer
Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
D-72076 Tübingen

E-mail: herbert.heyer@uni.tuebingen.de